

SÉRIE A 1097

N° D'ORDRE :

1935

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre DROUIN

Professeur au Collège du Protectorat à Hanoï

1^{re} THÈSE. — ETUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES THERMOSTATS ET
VARIATEURS DE TEMPÉRATURE.

2^e THÈSE. — LES DÉRIVÉS DE LA CELLULOSE ET LEURS APPLICATIONS INDUS-
TRIELLES.

Soutenues le 28 MAI 1927 devant la Commission d'Examen

MM. CH. FABRY . . . Président
H. BÉNARD . . . } Examinateurs
A. MAILHE . . . }

PARIS (V°)

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49



Digitized by the Internet Archive
in 2026

SÉRIE A 1097
N° D'ORDRE :
1935

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre DROUIN

Professeur au Collège du Protectorat à Hanoï

1^{re} THÈSE. — ETUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES THERMOSTATS ET
VARIATEURS DE TEMPÉRATURE.

2^e THÈSE. — LES DÉRIVÉS DE LA CELLULOSE ET LEURS APPLICATIONS INDUS-
TRIELLES.

Soutenues le

devant la Commission d'Examen

MM. CH. FABRY . . . *Président*

H. BÉNARD . . . }
A. MAILHE . . . } *Examineurs*

PARIS (V^e)

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1937

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.
Doyens honoraires P. APPELL, M. MOLLIARD.

Prof. honoraires }
P. PUISEUX.
V. BOUSSINESQ.
A. JOANNIS.
H. LE CHATELIER.
H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
A. LEBUC.
G. SAGNAC.

Professeurs }
Émile PICARD Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KÖNIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLEYANT . . . Minéralogie.
H. ANDOYER Astronomie.
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
E. HAUG Géologie.
Gabriel BERTRAND . . Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ Chimie appliquée.
G. URBAIN Chimie minérale.
Emile BOREL Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
Rémy PERRIER Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM Physique.
M. MOLLIARD Physiologie végétale.
E. CARTAN Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des groupes et calcul des variations.
A. COITON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY Physique.
Charles PÉREZ Zoologie.
Léon BERTRAND Géologie appliquée et géologie régionale.
R. LESPIEAU Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
E. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD . . . Botanique.
P. MONTEL Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT . . . Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSQ Biologie maritime.
G. JULIA Mathématiques générales.
A. JOB Chimie générale.
A. MAILHE Etude des combustibles.
L. LUTAUD Géographie physique.
Eugène BLOCH Physique théorique et physique céleste.
N..... . . . Mécanique des fluides et applications.

E. HÉROUARD . . . Zoologie.
E. PÉCHARD . . . Chimie (Enseig^t P. C. N.).
V. AUGER . . . Chimie analytique.
M. GUICHARD . . . Chimie minérale.
A. GUILLET . . . Physique.
C. MAUGUIN . . . Minéralogie.
L. BLARINGHEM . . Botanique.
A. MICHEL-LÉVY . . Pétrographie.
A. DERREIMS . . . Géologie.
R. DONGIER . . . Physique du globe.
A. DENJOY . . . Calcul différ. et intégral.
H. BÉNARD . . . Physique (P. C. N.).

E. DARMOIS . . . Physique.
G. BRUHAT . . . Physique.
H. MOUTON . . . Chimie physique.
L. JOLEAUD . . . Paléontologie.
M. JAVILLIER . . . Chimie biologique.
A. DUFOUR . . . Physique (P. C. N.).
F. PICARD . . . Zoologie (Évolution des
êtres organisés).
ROBERT-LÉVY . . . Zoologie.
L. DUNOYER . . . Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND . Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE . . . Radioactivité.

Secrétaire Daniel TOMBECK.



Étude théorique et expérimentale des thermostats et variateurs de température

INTRODUCTION

L'on sait de quelle importance est l'étude préalable correcte et complète d'un appareil de physique ; un appareil, même bien établi, ne donne de bons résultats qu'entre les mains de qui connaît ses particularités de fonctionnement. Un savant habile tire, d'appareils parfois médiocres, des résultats excellents *dans de certaines conditions*, parce qu'il en connaît exactement les qualités, les défauts et les limites d'emploi.

Or, si l'étude des *appareils de mesure* est aujourd'hui suffisamment poussée pour qu'il soit possible de les utiliser au mieux dans chaque cas particulier, il ne semble pas qu'il en soit de même *des appareils servant à réaliser certaines conditions expérimentales que l'on a fréquemment à reproduire au cours de recherches de laboratoire*. Bien que, dans presque toutes les expériences, il soit nécessaire de maintenir constants certains paramètres, et d'en faire varier d'autres selon des lois données, l'on peut dire que les *très nombreux* appareils (régulateurs ou variateurs) qui servent *le plus couramment* à réaliser de telles conditions sont encore fort mal connus, et que chaque expérimentateur est

obligé de déterminer lui-même, dans chaque cas particulier, la solution qui lui paraît la plus convenable.

Il est clair d'ailleurs, qu'outre l'intérêt qui s'attache à l'étude générale et systématique d'appareils servant à réaliser des conditions expérimentales usuelles, une telle étude, convenablement poussée *dans le détail*, ne peut manquer de mettre en évidence certaines propriétés de ces appareils, que l'expérience n'aurait peut-être pas permis facilement de découvrir. Partant, il peut en résulter de nouvelles possibilités expérimentales.

Le présent travail avait pour but primitif, conformément à l'esprit de ce qui précède, d'étudier les *thermostats*. Ce but s'est ensuite élargi, en étudiant complètement un appareil que nous avons imaginé en 1919 au cours de recherches sur la détermination de l'épaisseur des couches de passage par une méthode thermoélectrique⁽¹⁾. Le principe de cet appareil, qui est un appareil continu, se prête en effet à la construction d'une foule de régulateurs ; il utilise comme organe principal un système en *équilibre indifférent* où un cadre mobile commande un rhéostat de forme spéciale.

Afin de mieux permettre la séparation entre la partie expérimentale et la partie théorique de ce travail, nous ne croyons pas inutile d'en indiquer les grandes lignes.

Dans le Chapitre I, après quelques définitions générales nécessaires pour permettre de caractériser le fonctionnement d'un régulateur, nous donnons quelques indications sur l'allure de la régulation fournie par les thermostats continus, puis nous étudions le fonctionnement théorique des thermostats discontinus, qui sont les plus simples et de beaucoup les plus employés.

Après avoir mis en relief les qualités et les défauts de ces appareils, nous montrons ensuite comment l'exagération *intentionnelle* de l'un de ces défauts permettrait d'utiliser l'un

(¹) Diplôme d'Études Supérieures (Caen, 1920).

de ces appareils pour la détermination des conductibilités calorifiques par la méthode d'Ångström.

La fin du chapitre est consacrée aux expériences de vérification que nous avons entreprises sur ce sujet, accompagnées de courbes photographiques obtenues avec l'un de ces appareils. Afin de mieux mettre en évidence les propriétés des divers thermostats, nous choisissons des exemples se rapportant à des appareils peu précis : les défauts sont alors exagérés et apparaissent nettement. Nous évitons d'ailleurs toute confusion sur leur véritable valeur, ayant d'abord discuté la précision *maximum* qu'il est possible d'atteindre au cours du chapitre I.

Le Chapitre II est consacré aux *thermostats continus*. Nous y montrons d'abord que certains de ces appareils, contrairement à l'usage que l'on en fait généralement, ne sont pas de véritables thermostats, la température qu'ils tendent à maintenir dépendant de la température ambiante. Puis nous étudions le régulateur électromagnétique dont nous avons parlé plus haut. L'on verra combien, en pareille matière, il est nécessaire de pousser les discussions jusqu'au bout. Cette discussion montre en effet que, selon l'intensité du champ magnétique dans lequel tourne le cadre, un même appareil peut, de régulateur excellent, se transformer en un véritable « perturbateur ».

Cet appareil permet, non seulement de maintenir constante la température d'une étuve ou d'un four, mais aussi d'obtenir une température fonction sinusoïdale du temps, ou enfin une température fonction quelconque du temps, avec certaines réserves d'inégalité et de continuité. Cette étude, faite au début du Chapitre III, fournit encore une technique expérimentale remarquablement simple pour la mesure des conductibilités thermiques par la méthode d'Ångström : tout calcul de représentation empirique de la température de la barre y est supprimé, du fait même que la température à une extrémité de la barre à essayer varie sinusoïdalement.

Nous donnons enfin quelques indications sur des régulateurs de principe analogue, et dont il serait facile d'ailleurs de multiplier les exemples.

On trouvera, en dernier lieu, précisées certaines conditions de construction et de réglage, et l'on verra ainsi comment se trouvent résolues certaines difficultés d'ordre pratique que les descriptions schématisées du Chapitre II semblent soulever.

Au cours de tout ce travail nous utiliserons la loi de Newton pour le refroidissement ; encore que cette loi ne soit que grossièrement approchée, son emploi est tout à fait légitime lorsqu'il s'agit de *thermostats*, où, la température du milieu ambiant et celle de l'étuve considérée variant peu, la loi de Newton donne le premier terme d'un développement en série auquel on peut se borner. Dans tous les autres cas (température ambiante très variable, ou variateurs) la loi de Newton permet seulement de fixer l'allure des phénomènes.

Il n'entre pas dans le cadre de notre étude de décrire tous les thermostats dus à l'ingéniosité des divers inventeurs : c'est *par centaines* qu'il faut compter ces appareils, dont peu d'ailleurs ont survécu. Aussi, dans les indications bibliographiques que l'on trouvera plus loin, nous sommes nous préoccupé avant tout, lorsque les références (et c'est le cas général) n'ont trait qu'à de simples descriptions, de *classer* les appareils de manière à permettre d'en fixer immédiatement la place parmi les appareils schématiques que nous avons étudiés dans notre travail, et, partant d'en déterminer immédiatement les qualités et défauts théoriques, ainsi que les conditions pratiques d'emploi.

La plupart des travaux cités consistent en des descriptions d'appareils, sans aucune indication théorique sur l'allure de la régulation qu'ils fournissent, description suivie seulement de l'indication des résultats obtenus en notant à intervalles assez éloignés (d'heure en heure par exemple) la température du milieu réglé. Les auteurs définissent ainsi un écart maximum, résultat des expériences (« maximal

Schwankung » des auteurs allemands) qui, malheureusement, est insuffisant comme nous le verrons, pour fixer les idées sur la valeur de l'appareil. Cet écart dépend en effet d'une période propre de l'appareil, et aussi de variations extérieures possibles.

C'est dans un travail de *G. Gouy* ⁽¹⁾ que nous avons trouvé pour la première fois mention de cette période propre du système constitué par l'étuve et le thermostat discontinu [G. Gouy signale des périodes allant de 0 à 20 secondes avec son appareil]. Mais cette notion, fondamentale pour les thermostats à action discontinue, et sans laquelle aucune étude correcte de l'appareil n'est possible, semble ne pas s'être suffisamment imposée à l'attention des inventeurs, la plupart des descriptions n'en faisant pas mention. Par ailleurs il ne semble pas non plus que les chercheurs se soient préoccupés de comparer les divers appareils avec l'appui d'une théorie détaillée de façon à déterminer les modifications à apporter aux appareils par une voie plus courte que le tâtonnement expérimental.

En ce qui concerne la théorie des appareils de régulation *continus*, nous signalerons un mémoire très général de *M. Esclangon* ⁽²⁾ et où l'étude de la régulation repose sur la considération des perturbations des variables réglées et réglantes. Toutefois, nous signalerons que les appareils proposés par *M. Esclangon* possèdent le caractère commun à tous les appareils qui utilisent pour le réglage la variable thermométrique elle-même, à savoir qu'ils tendent à maintenir, non pas une température *constante*, mais une température *fonction de la température extérieure*. [C'est par rapport à cette fonction des paramètres extérieurs que sont définies les perturbations utilisées dans la théorie de *M. Esclangon*]. Dans des appareils construits ultérieurement (Réf 44 et 45) *M. Esclangon* a supprimé cet inconvénient.

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, 1897, p. 479.

⁽²⁾ *Mémoires de la Société des Sciences physiques de Bordeaux*, 5 janvier 1911.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

THERMOSTATS A ACTION DISCONTINUE

1. — POSITION DU PROBLÈME

Dans tout problème de régulation de température, l'on dispose :

a) D'un premier système S (étuve, four ... etc.) de capacité calorifique c , de coefficient de rayonnement ... ρ ⁽¹⁾, dont il s'agit de maintenir tous les points à une température constante donnée T ;

b) D'une source de chaleur, dont l'intensité, réglable, dépend d'un certain paramètre x ; très généralement, x est un paramètre *géométrique* (angle d'ouverture d'un robinet de gaz, position du curseur d'un rhéostat, ... etc.) ;

c) D'un thermomètre, placé au sein de S, de capacité calorifique c' , et dont les variations de température déterminent des variations corrélatives d'un paramètre *géométrique* x' (hauteur du mercure dans la tige, angle de rotation d'une spirale bimétallique, allongement d'une tige dilatable, ... etc.) ;

Le problème est d'établir entre x et x' une liaison telle,

(1) Ce coefficient sera défini avec précision au § 3.

que la température de S se maintienne aussi voisine que possible de la température désirée T .

Posé sous cette forme, il est trop général, et se décompose en deux autres de nature très différente :

α) Maintenir à tout instant une température **uniforme** dans tout l'intérieur de S ;

β) Cette condition une fois remplie, maintenir constante la température d'un **point** de S (en l'espèce, celui où se trouve placé le thermomètre régulateur).

Occupons-nous d'abord du premier de ces problèmes.

2. — RÉALISATION D'UNE TEMPÉRATURE UNIFORME

On néglige souvent d'assurer cette condition, parce que l'on n'utilise comme région d'expérience qu'une petite portion de S où la température peut être considérée comme uniforme en raison du peu d'étendue du volume utilisé. Cependant il y a toujours intérêt à réaliser l'uniformité, ne serait-ce que pour donner au phénomène une allure bien définie et calculable d'avance.

Nous remarquons que l'uniformité de la température serait certainement réalisée, si les échanges de chaleur entre S et l'extérieur (sous ce nom nous comprenons le milieu ambiant et aussi la source de chaleur) intéressaient *simultanément* et de la même manière tous les éléments de volume constituant S .

D'où deux manières de résoudre le problème :

1^o Ou bien, la matière des éléments de volume composant S étant *fixe*, s'arranger de façon à ce que chacun de ces éléments soit en contact avec la source de chaleur et aussi avec la surface de S par où s'opère le refroidissement. C'est impossible à réaliser rigoureusement, mais l'on s'en rapprochera :

a) En employant de préférence un mode de chauffage non localisé (immersion dans S d'une résistance chauffante com-

posée d'un grand nombre de fils fins répartis aussi régulièrement que possible) ;

b) En donnant à S une *surface extérieure aussi grande que possible* par rapport à son volume, de manière que tous les éléments de S soient également intéressés par le refroi-

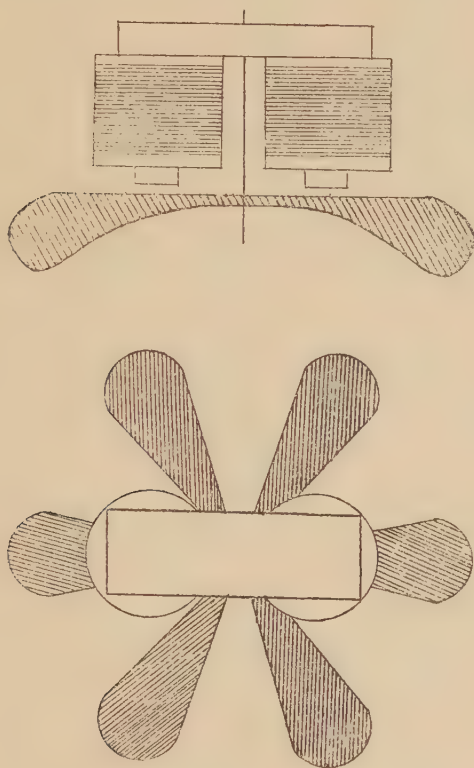


Fig. 1.

dissement. C'est une condition *purement géométrique*, et qui ne préjuge rien sur la valeur du coefficient de rayonnement de la surface : nous verrons plus loin qu'il y a toujours intérêt à *réduire* ce coefficient en *calorifugeant la surface*.

Ainsi nous sommes amenés à conclure que, étant donné le *volume* de S, et pour un même coefficient de rayonnement

du système, il ne reviendra *pas du tout au même* d'adopter, pour limiter notre volume, une petite surface mal calorifugée ou une surface grande mais bien calorifugée.

2° Ou bien rendre mobile la matière de S et faire en sorte que, dans un temps très court, tout élément de cette matière vienne successivement en contact avec la source de chaleur puis avec la surface par où s'opère le refroidissement, c'est-à-dire *brasser énergiquement le milieu que renferme S*.

Il est *indispensable* d'effectuer ce brassage *mécaniquement* : l'on ne peut, en effet, s'en rapporter, pour l'obtenir, aux *courants de convection*, qui *n'existent précisément qu'à la condition que la température de S soit loin de l'uniformité désirée*.

Nous avons obtenu de très bons résultats et une vitesse de brassage rigoureusement constante, en utilisant comme agitateur un très petit moteur synchrone à fer tournant dont le fer est une hélice à 4 ou 6 pales placée en face d'un électro (fig. 1). Une dépense de quelques watts suffit pour brasser l'air d'une étuve de plusieurs litres.

En pratique, l'on adoptera généralement une combinaison des deux procédés précédents (répartition des échanges de chaleur et brassage) dans la mesure où ils sont compatibles avec l'emploi que l'on veut faire de S. Nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que l'uniformité de la température aura été réalisée ; il nous reste maintenant à envisager le problème (b) : maintenir *un point* de S à une température déterminée.

3. — GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉGULATEURS CONTINUS

Pour fixer les idées, admettons, ce qui est le cas usuel, que S est *une étuve* renfermant un milieu gazeux.

Laissons de côté les régulateurs discontinus, étudiés en détail dans la suite de ce chapitre, et envisageons les conditions du problème pour un régulateur continu. Soient :

T la température à *maintenir* dans l'étuve ;

$T + \theta$, la température *réelle* de cette étuve, à un instant quelconque ;

$T + s$, la température du thermomètre régulateur qui est plongé dans l'étuve ; elle peut dans certains cas différer notablement de $T + \theta$, surtout pour des variations rapides ;

τ , la température ambiante, fonction quelconque et d'ailleurs inconnue du temps t .

Cela posé, le problème thermostatique serait *parfaitement* résolu, s'il était possible de maintenir θ nul, *quelle que soit la fonction τ du temps qui représente la température ambiante*. Nous allons voir que c'est impossible avec les appareils usuels, même pour des formes simples de τ , et que, par suite, le régulateur a seulement pour résultat de faire osciller la température autour d'une valeur moyenne voisine de T .

Supposons d'abord que le régulateur ne présente *ni inertie d'origine mécanique, ici amortissement* : il obéit *instantanément* aux variations de s .

Même si la loi de Newton n'est pas vérifiée, nous pouvons définir rigoureusement un coefficient de rayonnement ρ (qui comprendra à la fois le rayonnement proprement dit, et les échanges par conductibilité et par convection) en remarquant que, si θ *reste petit* et que τ *varie assez peu*, la quantité de chaleur Q cédée pendant l'unité de temps par l'étuve au milieu ambiant est une fonction de $T + \theta - \tau$, et nous poserons

$$\rho = \frac{dQ}{d(T + \theta - \tau)} \text{ pour } \theta = 0.$$

Nous définirons de même un coefficient ρ' pour les échanges de chaleur entre le thermomètre et l'étuve.

En adoptant les notions du § 1, la quantité de chaleur cédée par la source à l'étuve, pendant l'unité de temps, est une fonction de x , lui-même fonction de x' qui est fonction à son tour de s ; soit $\varphi(s)$ cette fonction.

De cette quantité de chaleur $\varphi(s)$:

12 ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES THERMOSTATS

- 1° La fraction $cd\theta$ chauffe de $d\theta$ le gaz de l'étuve ;
- 2° La quantité $c'ds$ chauffe de ds le thermomètre du régulateur ;
- 3° Enfin, la quantité :

$$\rho(T + \theta - \tau)$$

est perdue au dehors.

D'où l'équation :

$$(1) \quad c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = \varphi(s).$$

D'autre part, l'équation

$$(2) \quad c' \frac{ds}{dt} = \rho'(\theta - s)$$

régit les échanges de chaleur entre l'étuve et le thermomètre du régulateur.

Pour que la régulation fût parfaite, il faudrait que les équations (1) et (2) admettent la solution $\theta = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} s = s_0 e^{-\frac{\rho'}{c'} t} \\ \tau = T - \frac{\rho'}{\rho} s_0 e^{-\frac{\rho'}{c'} t} - \frac{\varphi\left(s_0 e^{-\frac{\rho'}{c'} t}\right)}{\rho}. \end{cases}$$

Donc, s_0 étant donné, si l'on suppose qu'à cet instant la température désirée T soit atteinte dans l'étuve (d'où $\theta = 0$), il existe *un seul* mode de variation de la température ambiante τ qui soit compatible avec le maintien de $\theta = 0$ dans la suite du temps. Comme il n'y a évidemment aucune chance pour que τ varie de cette façon, autant dire que *la régularité parfaite est impossible, quel que soit l'appareil employé.*

Un appareil de l'espèce précédente n'est qu'un schème un peu simpliste, puisqu'il est impossible de réaliser des organes en mouvement où n'intervienne ni inertie ni

frottements. Le paramètre x^k étant fonction de x , nous pouvons rapporter tous les déplacements à x ; le système mécanique du régulateur sera alors équivalent à un certain système ayant une masse M , présentant des frottements $A \frac{dx}{dt}$ que nous admettrons proportionnels à la vitesse, et où la force agissante $\Psi(s)$ est une fonction de la température $T + s$ du thermomètre par l'intermédiaire de x' . Enfin la chaleur cédée pendant l'unité de temps, par la source à l'étuve est alors une fonction de la position x de l'organe régulateur, et nous avons enfin :

$$(1') \quad c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = \Phi(x)$$

$$(2) \quad c' \frac{ds}{dt} = \rho'(\theta - s)$$

$$(3) \quad M \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} = \Psi(s)$$

Comme plus haut, nous voyons que la régulation parfaite, c'est-à-dire le maintien de $\theta = 0$ quand τ varie arbitrairement, est impossible. Mais de plus, tandis que dans le cas précédent l'allure de la régulation était exponentielle, la présence de l'équation du second ordre (3) nous montre que maintenant la régulation pourra être accompagnée d'oscillations mécaniques et thermiques de période bien déterminées pour un système étuve-régulateur donné.

Comme nous allons voir que ces oscillations constituent l'un des principaux défauts des régulateurs *discontinus*, il y aura intérêt, dans les appareils continus dont nous venons d'esquisser la théorie, à supprimer les oscillations par une diminution suffisante de M et une augmentation de A . Nous verrons réapparaître ces conditions dans le chapitre II consacré aux régulateurs continus.

4. — DÉFINITIONS DIVERSES

1° Les phénomènes précédents se compliquent encore quand les organes mécaniques dont le déplacement est

défini par α présentent des *frottements de solides*. Le régulateur n'entre alors en action qu'à la condition que la force $\Psi(s)$ dépasse une certaine valeur, c'est-à-dire lorsque l'écart s de la température du thermomètre dépasse en valeur absolue un certain écart minimum σ .

Cet écart minimum définit la *sensibilité statique* ⁽¹⁾, que nous appelons ainsi parce qu'elle correspond à l'approximation avec laquelle nous réglerons θ pour des variations *extrêmement lentes* de la température ambiante τ .

Il est clair qu'un appareil est d'autant meilleur, toutes choses égales d'ailleurs, que la sensibilité statique est plus petite, puisque nous ne pouvons espérer maintenir la température qu'à $\pm \sigma$ près dans les conditions les plus favorables. Enfin, la sensibilité statique peut encore n'être pas nulle pour certains appareils qui cependant n'ont aucun frottement de solides (nous en verrons plus loin un exemple pour le thermomètre à contacts).

2° La température ambiante τ étant variable selon une loi quelconque, nous avons vu que l'on ne peut maintenir θ nul ; la température de l'étuve oscille alors généralement de part et d'autre de T ; θ présente des maxima et des minima dont la valeur dépend, outre les conditions initiales, de la fonction τ .

Afin d'obtenir des indications sur la manière dont se comporte le régulateur, nous chercherons ce qui arrive pour certains modes déterminés de variation de τ ; nous chercherons, par exemple, quelle est la perturbation apportée à la température de l'étuve par une brusque variation de la température ambiante (courant d'air froid sur l'appareil). Nous obtiendrons ainsi des indications plus que suffisantes, dans les cas usuels, pour juger de la valeur des appareils employés comme thermostats.

3° Un régulateur ne peut augmenter ni diminuer au delà

(1) M. ESCLAUGON (Réf. 43) définit sous ce nom une grandeur toute différente de celle utilisée ici.

de toute limite la quantité de chaleur que la source cède à l'étuve pendant chaque seconde. Il en résulte qu'il existe deux valeurs extrêmes τ_1 et τ_2 de la température ambiante, entre lesquelles seulement le régulateur fonctionne. Ce sont les températures pour lesquelles la quantité de chaleur que perd l'étuve par seconde est juste égale à celle que lui fournit la source de chaleur, soit lorsqu'elle a son intensité maximum, soit pour l'intensité minimum de cette source.

L'intervalle (τ_1, τ_2) définit *l'intervalle d'emploi* du thermostat; nous appliquerons aussi quelquefois ce nom à la différence $\tau_1 - \tau_2$, ce qui ne peut prêter à confusion d'ailleurs.

Il est clair que pour qu'un thermostat soit pratiquement utilisable, il faut qu'il admette un intervalle d'emploi suffisant pour encadrer toutes les variations possibles de la température ambiante au cours des expériences.

5. — GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉGULATEURS DISCONTINUS

Ces appareils sont de beaucoup les plus répandus, l'on pourra s'en rendre compte par les indications bibliographiques que nous avons données et qui ne sont relatives qu'à des appareils types (réf. 2, 3, 5, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 22, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 37, 39, 40, 42).

Ils se composent généralement d'un thermomètre qui ferme le circuit d'une pile sur un électro-aimant, quand la température réelle $T + \theta$ de l'étuve dépasse la température T à maintenir. L'électro attire une pièce qui forme chicane dans une conduite d'arrivée de gaz, on aplatit un tube de caoutchouc, on interpose un écran entre l'étuve et la source de chaleur. ou même (réf. 2 et 18) déplace la source de chaleur..... Le nombre des dispositifs est considérable, mais ils se ramènent tous à l'appareil schématique que nous allons étudier.

Nous supposons sur la figure 2 que l'armature même de

l'électro-aimant est une mince palette de fer doux qui, attirée, réduit brusquement la section de passage du gaz. Sans insister sur une foule de dispositifs équivalents, nous signalons que le thermomètre à mercure peut être remplacé par un thermomètre à gaz, par une spirale bimétallique, etc.

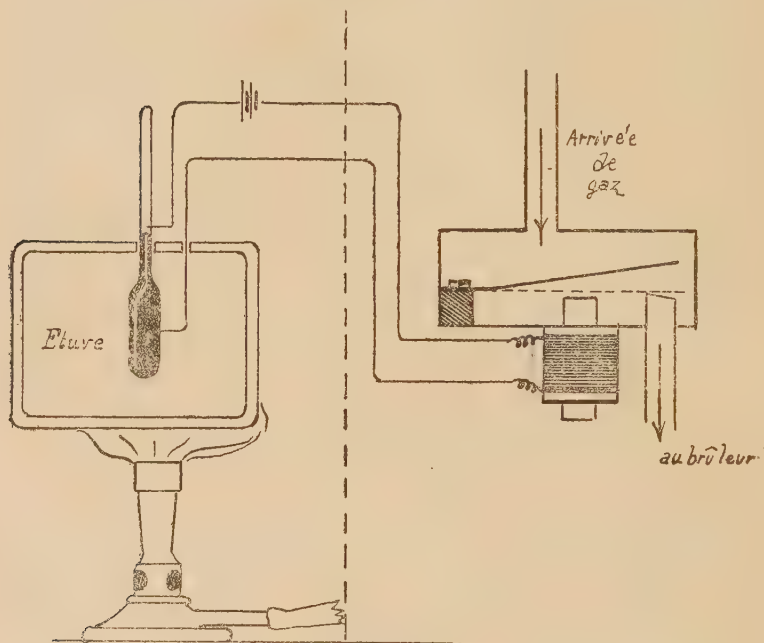


Fig. 2.

Bien que cette remarque soit de pure curiosité, nous signalons que la présence d'un thermomètre à contacts, quoique ne comportant aucun frottement de solides, introduit dans le fonctionnement de l'appareil une sensibilité statique non nulle σ . En effet, pour que l'électro attire son armature, il ne suffit pas que le mercure touche le fil, il faut encore que la résistance de ce contact soit assez faible pour que l'intensité du courant permette à l'électro d'attirer son armature, c'est-à-dire qu'il faut que le fil soit immergé sur une petite longueur. La sensibilité statique serait nulle

si le déclanchement de l'électro se produisait pour la même longueur d'immersion du contact lorsque le mercure descend. Bien qu'un contact ne soit jamais rigoureusement défini, on peut admettre qu'il en est ainsi pour le contact mercure-platine, mais nullement ainsi dans les thermomètres (spirales bimétalliques, relais placé dans un pont bolométrique, etc.) où le contact a lieu entre *solides* et dépend de la pression entre contacts. Dans le cas des thermomètres à relais, cet effet est même si important qu'un inventeur, M. Verney (réf. 42) a proposé récemment un dispositif ingénieux permettant d'obtenir rapidement une pression élevée sur les contacts.

Quoiqu'il en soit, nous supposerons à peu près nulle la sensibilité statique et nous la négligerons tout d'abord.

Cela posé, nous remarquons que les équations du § 3 ne s'appliquent plus aux appareils discontinus. Le rôle des diverses inerties (ici, inertie de la lamelle de fer doux, self-induction de l'électro aimant, inertie du gaz contenu dans le régulateur et le brûleur,...) n'est pas continu : il se borne à *apporter un certain retard* aux variations brusques d'intensité de la source de chaleur.

Ce retard peut être considéré comme une certaine constante caractéristique, non pas du régulateur seul, mais du système régulateur-étuve-source de chaleur. Nous le désignerons par ϵ .

Soit q la quantité de chaleur cédée par seconde à l'étuve quand la chicane est ouverte, q' la quantité de chaleur correspondant à la chicane fermée ($q' < q$). Ce sont très approximativement des constantes. Nous supposons, bien entendu, si l'on emploie le dispositif de la figure 2, que la pression du gaz est constante, ce qui n'est pas réalisé sur les canalisations de ville, mais s'obtient aisément par l'emploi d'un petit gazomètre auxiliaire.

L'on voit donc maintenant, que θ dépend de l'une ou de l'autre des deux équations.

$$(a) \quad c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = q$$

ou

$$(\beta) \quad c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = q'$$

selon que la chicane est ouverte ou fermée. L'échauffement du thermomètre est toujours régi par :

$$(2) \quad c' \frac{ds}{dt} = \rho(\theta - s)$$

Supposons qu'à un instant donné s soit *négligeable* : la chicane est ouverte, le brûleur brûle à pleine flamme, le système des équations (2) et (α) détermine des fonctions s et θ *croissantes*. A un certain instant t_1 , s s'annule et le circuit de l'électro est fermé. Le brûleur ne brûle à flamme réduite qu'un temps ε après, et à partir de cet instant $t_1 + \varepsilon$, ce sont les équations (2) et (β) qui déterminent les variations de s et de θ , et donnent pour ces écarts de température des valeurs *décroissantes*. Donc s s'annule à nouveau à un certain instant t_2 , le brûleur ne brûle à pleine flamme qu'au temps $t_2 + \varepsilon, \dots$ etc.

Si entre les équations précédentes nous éliminons θ , nous trouvons au lieu des équations (α) et (β) :

$$(4) \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt} + T + s - \tau = \begin{cases} \frac{q}{\rho} & \text{pour } (\alpha) \\ \frac{q'}{\rho} & \text{pour } (\beta) \end{cases}$$

Si nous remarquons qu'en pratique c' est négligeable devant c , nous pouvons écrire :

$$(\alpha') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt} + s = \frac{q}{\rho} + \tau - T$$

$$(\beta') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt} + s = \frac{q'}{\rho} + \tau - T$$

L'*intervalle d'emploi* de l'appareil est ici évidemment défini par les valeurs τ_1 et τ_2 de la température ambiante :

$$\tau_1 = T - \frac{q}{\rho} \quad \tau_2 = T - \frac{q'}{\rho}$$

pour lesquelles la chaleur rayonnée est égale à celle fournie par le brûleur, soit ouvert en grand (τ_1), soit réduit (τ_2).

Les seconds membres de (α') et (β') s'écrivent alors respectivement

$$\tau - \tau_1 \quad \text{et} \quad \tau - \tau_2.$$

L'on peut en donner une interprétation simple qui nous sera utile en pratique pour effectuer le réglage d'un thermostat. Bloquons en effet la chicane dans la position d'ouverture ; le régulateur n'agit plus et la température de l'étuve tend vers une certaine valeur

$$T + \theta_1 = T + \tau - \tau_1 \quad \text{d'où} \quad \theta_1 = \tau - \tau_1.$$

Bloquons le régulateur dans la position de fermeture ; la température limite de l'étuve et l'écart limite correspondants sont :

$$T + \theta_2 = T + \tau - \tau_2 \quad \text{d'où} \quad \theta_2 = \tau - \tau_2.$$

θ_1 et θ_2 sont accessibles par les expériences précédentes : il est donc très facile d'évaluer l'intervalle d'emploi qui est

$$(\tau - \theta_1, \quad \tau - \theta_2).$$

Les seconds membres des équations (α') et (β') s'écrivent alors simplement θ_1 et θ_2 .

Etudions maintenant d'abord le fonctionnement du régulateur, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général, en supposant en premier lieu que τ est constant. Ensuite nous étudierons l'influence des variations de la température ambiante τ sur la régulation effectuée par ce genre d'appareils.

6. — PREMIER CAS PARTICULIER.

LE RAPPORT $\frac{c'}{\rho}$ EST NÉGLIGEABLE

Cette hypothèse revient à admettre que c' est négligeable devant ρ' , c'est-à-dire que le thermomètre présente un

coefficient de rayonnement considérable par rapport à sa masse en eau. *Ce cas n'est évidemment jamais réalisé avec les thermomètres à mercure, à alcool ou à gaz.*

Il peut être réalisé très sensiblement quand le thermomètre est une résistance bolométrique formée de fils fins *parallèles* et noircis ⁽¹⁾. Un relais sensible, qui remplace le galvanomètre, ferme alors le circuit de l'électro-aimant qui commande le régulateur.

Lorsque cela est possible, une disposition très avantageuse donnant avec certitude $\frac{c'}{\rho} = 0$ (et par conséquent $s = \theta$) consiste à rendre l'étuve étanche et à l'utiliser elle-même comme thermomètre à air.

Ce dispositif a été employé pour obtenir les courbes photographiques que nous donnons plus loin (§ 12).

Dans tous les cas précédents, l'équation (2) se réduit à $s = \theta$, et par conséquent les équations (α') et (β') deviennent :

$$(\alpha'') \quad \frac{c}{\rho} \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_1$$

$$(\beta'') \quad \frac{c}{\rho} \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_2.$$

Supposons que l'on commence à chauffer l'étuve : θ est négatif, et l'équation (α'') donne :

$$\theta = (\theta_1 - \theta_0) e^{-\frac{\rho}{c} t} + \theta_1.$$

$T + \theta_0$ étant la température initiale ; θ s'annule à l'instant

$$(5) \quad t_1 = \frac{c}{\rho} \log \frac{\theta_1 - \theta_0}{\theta_1}$$

le circuit de l'électro est alors fermé ; le régulateur n'agit

(1) Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'emploi de fils *roulés en hélice* est désavantageux au point de vue des pertes de chaleur par convection et conductibilité. Cette propriété a été mise à profit dans la construction des lampes 1/2 watt, où l'on enroule le fil en hélice pour diminuer les pertes de chaleur (Cf. A. BLANC, *Le rayonnement*, p. 180).

qu'à l'instant $t_1 + \varepsilon$, pour lequel θ a encore augmenté et a pris la valeur :

$$(6) \quad \theta' = \theta_1 \left[1 - e^{-\frac{\rho \varepsilon}{c}} \right].$$

A partir de ce moment, c'est l'équation (β'') qui définit θ ; θ s'annule à nouveau à l'instant

$$(7) \quad t_2 = t_1 + \varepsilon + \frac{c}{\rho} \log \frac{\theta_2 - \theta'}{\theta_2}$$

à l'instant $t_2 + \varepsilon$ où le régulateur entre en action, la température est :

$$(8) \quad \theta'' = \theta_2 \left[1 - e^{-\frac{\rho \varepsilon}{c}} \right].$$

Dès ce moment nous voyons qu'un régime périodique est établi : θ' et θ'' ne dépendant pas de la valeur initiale θ_0 , nous retrouverons toujours les mêmes écarts ⁽¹⁾.

Appelons t_3 le nouvel instant pour lequel θ s'annulera encore ; la période du phénomène est évidemment

$$(9) \quad p = t_3 - t_1 = 2\varepsilon + \frac{c}{\rho} \log \left[e^{-\frac{2\rho\varepsilon}{c}} - \frac{(\theta_1 - \theta_2)^2}{\theta_1\theta_2} \left[1 - e^{-\frac{\rho\varepsilon}{c}} \right] \right].$$

Nous rappelons la signification de θ_1 et θ_2 ; quand le régulateur est maintenu ouvert par un blocage convenable, la température de l'étuve augmente et tend vers $T + \theta_1$; quand il est maintenu fermé, la température vers $T + \theta_2$. Il est donc nécessaire, pour qu'il y ait effectivement régulation, que θ_2 soit *négatif*, et la formule (8) montre qu'il y a intérêt, pour raccourcir la période, à diminuer, autant que possible θ_1 et θ_2 , de manière à conserver cependant un intervalle

⁽¹⁾ Sous réserve toutefois que θ_1 et θ_2 soient constants, c'est-à-dire que les variations de q et q' soient négligeables. Nous examinerons plus loin l'influence des variations dues à la source de chaleur et à la température ambiante.

d'emploi compatible avec l'usage que l'on veut faire de l'appareil.

Cherchons maintenant la précision de la régulation. Les écarts θ' et θ'' ne sont généralement pas égaux; l'oscillation totale Θ de la température de l'étuve est, d'après les formules (6) et (8) :

$$(10) \quad \Theta = (\theta_1 - \theta_2) \left(1 - e^{-\frac{\rho \varepsilon}{c}} \right).$$

Mais, d'après ce que nous avons vu à la fin du § 5, l'intervalle d'emploi est

$$(\tau - \theta_1, \tau - \theta_2).$$

Si l'on veut que le régulateur agisse, la *fluctuation maximum admissible pour la température ambiante est donc* :

$$(\tau - \theta_2) - (\tau - \theta_1) = \theta_1 - \theta_2.$$

Nous la désignerons dans ce qui suit par $\Delta\tau$, et, avec cette notation, la formule (9) devient :

$$(10') \quad \Theta = \Delta\tau \left(1 - e^{-\frac{\rho \varepsilon}{c}} \right)$$

soit très sensiblement, si le retard ε est petit :

$$(11) \quad \Theta = \frac{\rho \varepsilon \Delta\tau}{c}.$$

Il y a donc intérêt, pour obtenir la meilleure régulation possible :

1^o *A diminuer $\frac{\rho}{c}$ en calorifugeant l'étuve;*

2^o *A rendre le retard ε aussi petit que possible;*

3^o *A régler la source de chaleur de manière que l'écart $\theta_1 - \theta_2$ entre les températures d'équilibre quand le régulateur est bloqué dans l'une ou l'autre de ses deux positions, soit aussi petit que possible (cf formule 10);*

4^o *L'on ne doit plus oublier toutefois qu'en réduisant $\theta_1 - \theta_2$, l'on réduit en même temps l'intervalle d'emploi et*

par conséquent la fluctuation maximum admissible $\Delta\tau$ pour la température ambiante.

Une grande précision et un grand intervalle d'emploi sont donc, pour un régulateur discontinu, des qualités incompatibles.

Telles sont les conclusions auxquelles conduit l'étude des thermostats discontinus quand $\frac{c'}{\rho'}$ est négligeable ; nous verrons à la fin du chapitre comment l'expérience confirme ces conclusions théoriques, et quelle est la valeur pratique de ces appareils si répandus. Nous allons maintenant étudier une application intéressante de ces appareils.

7. — APPLICATION DE L'APPAREIL PRÉCÉDENT A LA MESURE DES CONDUCTIBILITÉS THERMIQUES PAR LA MÉTHODE D'ÅNGSTRÖM

Le problème est d'imposer à l'une des extrémités d'une barre cylindrique de la substance à essayer, une température périodiquement variable.

Exagérons le défaut du thermostat précédent, en augmentant énormément le retard ε et les écarts θ_1 et θ_2 entre les températures limites et la température ambiante.

Nous avons ainsi un moyen d'obtenir *très simplement* une période quelconque (cf. formule 8 du § 7) avec une amplitude également quelconque (cf. formules 10 ou 10').

Nous nous bornons à indiquer ici la technique expérimentale que l'on pourrait employer, la prédétermination complète des constantes de l'appareil pouvant par ailleurs s'effectuer, comme pour un thermostat discontinu, à l'aide des méthodes générales que nous exposons plus loin (§ 8).

1° L'étuve à gaz doit être remplacée par un calorimètre plein d'eau ou d'huile, l'eau étant d'ailleurs préférable en raison de sa conductibilité. La barre à étudier est fixée dans la paroi par un anneau étanche, en *substance très peu*

conductrice — pour éviter l'influence des variations propres de température de la paroi, la largeur de cet anneau est réduite au minimum.

2° L'eau du calorimètre est chauffée électriquement et agitée par un petit moteur M. Le thermomètre est une résistance bolométrique R, le pont utilise un relais en place de galvanomètre (fig. 3).

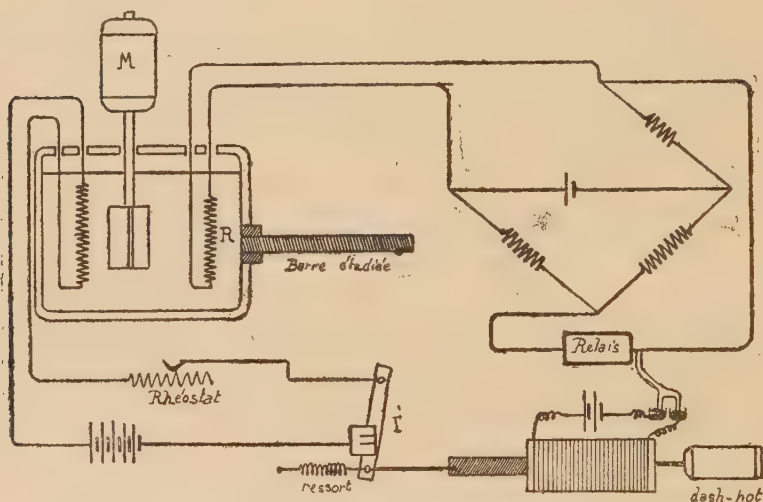


Fig. 3.

3° Pour augmenter ε , on utilise un relais différé comprenant dans le circuit des contacts du relais à cadre mobile, un solénoïde à plongeur muni d'un dash-pot ou retardateur ; le noyau du solénoïde actionne l'interrupteur I.

4° Le circuit de chauffage étant ouvert quand le noyau du solénoïde est complètement aspiré, l'on a $\theta_2 = \tau - T$; d'autre part, en utilisant un courant de chauffage beaucoup trop intense pour maintenir la température T, l'on exagère θ_1 . On peut obtenir ainsi (formules 10 et 10') des amplitudes suffisantes, et des arcs de courbe (analogues à ceux de la figure 6) *presque rectilignes* — ce qui facilite la représentation de la température à l'origine en série de Fourier.

Nous avons utilisé cette méthode pour essayer de déterminer les conductibilités de toute une série d'alliages zinc-antimoine, nous l'avons abandonnée à cause des calculs trop laborieux que nécessite la représentation empirique de la température *en un point quelconque de la barre*, par une série de Fourier (inconvenient inhérent à la méthode d'Ångström). Toutefois, nous avons tenu à la signaler ici, pour montrer comment l'exagération de certains défauts d'un appareil permet parfois de l'utiliser à d'autres usages que celui pour lequel il était destiné.

Dans le troisième chapitre (§ 27) nous verrons une autre manière d'appliquer la méthode d'Ångström, *imcomparablement plus simple*, parce que l'on a le moyen de n'utiliser *qu'un seul sinus*, au lieu d'une série de Fourier. *Tout calcul de représentation empirique y est supprimé.*

8. — MODE D'EMPLOI DES THERMOSTATS CONTINUS

$$\text{POUR LESQUELS } \frac{c'}{\rho} = 0$$

Il est commode, pour utiliser les appareils précédemment étudiés, d'adopter une technique invariable qui réduise au minimum la perte de temps qu'entraîne toujours un réglage et fixe en même temps d'une façon certaine la précision que l'on obtiendra.

L'on se propose généralement, *l'étuve et le thermostat étant donnés, de réaliser dans l'étuve une température T, en ne tolérant pour l'oscillation totale Θ qu'une certaine valeur donnée* : de plus, l'on veut généralement aussi *que l'appareil régulateur fonctionne quelle que soit la valeur de la température ambiante entre deux limites τ_1 et τ_2 , ce qui détermine pour cette dernière la fluctuation admissible $\Delta\tau$.*

L'on opère alors dans l'ordre suivant :

1° On détermine $\frac{\rho}{c}$ d'après la courbe de refroidissement de l'étuve :

2° On détermine expérimentalement le retard ε ; pour cela on fera une expérience avec des températures limites $T + \theta_1^0$, et $T + \theta_2$ quelconques, mais très écartées ; ε se déduira de la période observée p^0 .

3° Cela posé, la formule (11) donne

$$(12) \quad \Delta\tau = \frac{\theta c}{\rho \varepsilon}.$$

Si la valeur ainsi obtenue pour $\Delta\tau$ est *inférieure* à la fluctuation de la température ambiante que l'on veut pouvoir tolérer, *l'appareil ne peut pas servir dans les conditions imposées* ; il y a lieu alors de le modifier, en agissant sur $\frac{\rho}{c}$, ou si possible sur le retard ε .

4° Si, au contraire, le $\Delta\tau$ donné par (12) est égal ou supérieur à la fluctuation que l'on s'est imposée, l'appareil est utilisable et fournira la régulation exigée ; il ne reste alors qu'à régler la source de chaleur. Pour cela, opérant pour une valeur moyenne τ de la température ambiante, on bloquera l'organe régulateur dans la position du chauffage maximum, et l'on réglera la source de chaleur de manière à obtenir *sensiblement* la température limite $T + \theta_1$, définie par :

$$\theta_1 = \frac{\theta c}{2\rho\varepsilon}.$$

On le bloquera ensuite dans la position de chauffage minimum, et on agira sur le réglage de ce chauffage minimum de manière à avoir à peu près une température limite $T + \theta_2$ telle que :

$$\theta_2 = -\frac{\theta c}{2\rho\varepsilon}.$$

Nous voyons d'après cela que le *réglage correct d'un thermostat nécessite que l'on puisse agir indépendamment sur le chauffage maximum et sur le chauffage minimum.*

Lorsque l'appareil employé ne comporte pas ces deux réglages indépendants (ce serait le cas, par exemple, de

l'appareil schématique de la figure 2), on peut cependant l'utiliser d'une façon rationnelle en utilisant simultanément deux sources de chaleur, dont l'une seulement est variable et commandée par le régulateur ; l'on dispose alors bien des deux réglages nécessaires.

Nous n'avons jusqu'à présent pas précisé les unités employées, les équations écrites plus haut sont valables quel que soit le système d'unités adopté. Dans la suite, toutes les fois que nous citerons des résultats d'expérience ou que nous fixerons les idées par des valeurs numériques, nous adopterons :

Comme unité de quantité de chaleur : la petite calorie.

Comme échelle thermométrique : l'échelle centigrade.

Pour tout le reste, le système C. G. S.

Si nous revenons aux opérations 1°, 2° et 3° que nécessite le réglage du thermostat, nous voyons que la première se résout aisément sans qu'il soit besoin de tracer une courbe complète de refroidissement. Il suffit, en désignant par t_1 , t_2 , t_3 trois instants équidistants séparés par un intervalle de temps quelconque égal à t , de noter les températures correspondantes T_1 , T_2 , T_3 de l'étuve, et de former les différences :

$$u = T_2 - T_1 \quad v = T_3 - T_2$$

On a alors très simplement :

$$\frac{\rho}{c} = \frac{1}{t} \log \frac{u}{v}.$$

En ce qui concerne d'autre part la détermination du retard ε , la formule (9) qu'il faudrait appliquer est susceptible d'une simplification considérable. En effet $\frac{\rho}{c}$ est toujours petit en pratique (de l'ordre de 10^{-2} par exemple) ; d'autre part ε est également petit (inférieur à 1 seconde dans tous les cas usuels) : donc $\rho \frac{\varepsilon}{c}$ est très petit, et l'équation (9) devient :

$$(9') \quad p = \varepsilon \left[2 - \frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right]$$

θ_1 et θ_2 étant de signes contraires, l'on voit que la période p est toujours *au moins égale à 4ϵ* . Il est commode, le calcul de ϵ devant se répéter un certain nombre de fois au cours du réglage, de le déterminer à l'aide de l'abaque I donné ci-contre, qui rend cette opération immédiate. Cet abaque n'est établi que pour des valeurs de la *période comprise entre 0 et 3 secondes*, c'est-à-dire pour des thermostats sensibles pour lesquels ϵ est petit. Mais comme p et ϵ sont proportionnels, on peut aussi bien l'utiliser pour des valeurs de p comprises entre 0 et $3m$ secondes : on déterminera alors sur l'abaque la valeur de $\frac{\epsilon}{m}$ au lieu de celle de ϵ .

D'autre part, l'abaque II, qui traduit la relation (12) permet de trouver immédiatement de quelle manière il faut modifier l'une des grandeurs $\Delta\tau$, Θ , $\frac{p}{c}$, ϵ , pour que les autres remplissent les conditions que l'on leur a imposées.

9. — DEUXIÈME CAS PARTICULIER. LE RETARD ϵ EST NUL

Étudions maintenant le fonctionnement théorique d'un thermostat agissant sans retard, mais où le rapport $\frac{c'}{p}$ ne peut plus être considéré comme négligeable.

Le retard ϵ étant toujours notable lorsque l'on emploie le chauffage au gaz, il sera nécessaire de chauffer l'étuve électriquement. De plus, de grandes précautions seront nécessaires si l'on veut réellement rendre ϵ négligeable ; pour le montrer, considérons un dispositif à résistance bolométrique et relais, analogue à celui que l'on obtiendrait en supprimant le dash-pot sur la figure 3 ; nous obtenons le dispositif préconisé par *Darwin* (réf. 34). Le circuit des contacts du relais est maintenu normalement ouvert par le couple antagoniste des ressorts spiraux qui agissent sur le cadre mobile ; pour qu'il y ait contact, donc fermeture du circuit de l'électroaimant et ensuite de l'interrupteur, il faut

que le relais tourne d'un petit angle α , ce qui exige que le courant de déséquilibre du pont ait atteint une valeur suffisante.

Nous considérons, par exemple, un type usuel de relais sensible pour lequel cette rotation a lieu pour $i = 10^{-4}$ ampère, la résistance du cadre étant 75 ohms. Plaçons-nous dans la condition plus favorable où les 4 bras du pont sont égaux et ont pour valeur commune environ 75 ohms. Admettons que l'on pousse la dépense dans la résistance bolométrique à 1 watt, et constituons-la en nickel dont le coefficient de température est $6 \cdot 10^{-3}$; pour un écart θ de la température de l'étuve, le courant dans le cadre est

$$i = 1,810^{-4} \theta.$$

Reportons nous au § 6 : Nous avons

$$\theta = \theta_1 \left[1 - e^{-\frac{\rho}{c} t} \right]$$

en comptant les temps à partir du moment où θ s'est annulé. De la condition de fonctionnement du relais ($i = 10^{-4}$ ampère) on tire :

$$t = -\frac{c}{\rho} \log \left[1 - \frac{1}{1,8 \theta_1} \right]$$

soit sensiblement, si θ_1 n'est pas trop petit, c'est-à-dire si l'on veut conserver à la fluctuation extérieure corrigeable Δt une valeur raisonnable :

$$t = \frac{c}{\rho \times 1,8 \theta_1}.$$

Ce retard est très loin d'être négligeable ; en effet $\frac{c}{\rho}$ est généralement compris entre 10^{-2} et 10^{-3} (avec les unités indiquées plus haut) ; il en résulte que t est toujours supérieur à $\frac{50}{\theta_1}$ sec. Corrélativement, le retard ainsi introduit n'est inférieur à une seconde que si la température d'équilibre de l'étuve pour le plein chauffage dépasse de plus de 50° la température à maintenir.

On comprend dès lors l'intérêt énorme qui s'attache à la construction des relais extrêmement sensibles, intérêt que les expériences indépendamment de tout calcul, ont déjà mis en évidence (Réf. 42). Nous croyons donc que, malgré l'apparence d'un dispositif plus perfectionné, le dispositif à résistance bolométrique et relais nous donnera des retards ε comparables à ceux que l'on obtient avec le chauffage au gaz, à moins de dispositions spéciales telles que celle employée par M. VERNEY (Réf. 42) ⁽¹⁾, ou d'admettre dans la résistance bolométrique une dépense d'énergie élevée — c'est-à-dire de la faire concourir au chauffage [voir Note III, *in fine*].

Il résulte de ces conditions que le type d'appareil pour lequel il serait le plus légitime de considérer ε comme négligeable, est un dispositif tel que celui de la figure 4, comportant un thermomètre à contacts qui ferme le circuit d'un électro. Cet électro est muni d'une armature aussi légère que possible, qui vient modifier l'intensité du chauffage par un couplage de résistances en parallèle.

Un réglage convenable de R' et R'' déterminera les valeurs de θ_1 et θ_2 les plus convenables.

L'on voit que maintenant s (qui n'est plus égal à θ puisque $\frac{\rho'}{\rho}$ n'est pas négligeable), dépendra de l'une ou de l'autre des deux équations :

$$(\alpha''') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left[\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right] \frac{ds}{dt} + s = \theta_1$$

$$(\beta''') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left[\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right] \frac{ds}{dt} + s = \theta_2$$

⁽¹⁾ On sait qu'en Télégraphie, on utilise des relais à cadre mobile à la transmission de signaux qui se succèdent un grand nombre de fois par seconde. Il n'y a pas contradiction avec ce qui précède. Le retard trouvé plus haut est dû à l'inertie calorifique du système, il provient de ce que le courant qui traverse le cadre n'atteint que lentement, à mesure que θ augmente, une valeur suffisante pour faire fonctionner le relais. En télégraphie, au contraire, la self du circuit et l'inertie de l'armature sont seules en jeu ; le courant atteint très vite une valeur notable.

selon que l'interrupteur z sera fermé ou ouvert, c'est-à-dire selon que s sera *négalif* ou *positif*. Les intégrales de ces équations se raccordent le long de l'axe des temps avec la même valeur de $\frac{ds}{dt}$ aux points de raccordement, puisque l'équation (2) donne :

$$(2') \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\rho'}{c'} (\theta - s).$$

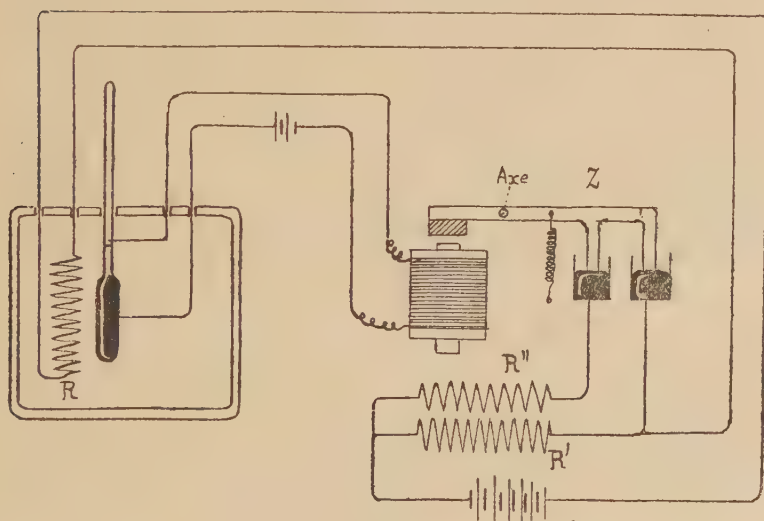


Fig. 4.

Cependant les phénomènes sont moins faciles à étudier que dans le premier cas, parce qu'il n'est plus possible de calculer d'avance les instants $t_1, t_2, \dots$ des raccordements successifs (instants où s s'annule).

D'autre part, θ est maintenant différent de s et a pour valeur

$$(2'') \quad \theta = s + \frac{c'}{\rho'} \frac{ds}{dt}.$$

Suivons l'allure des phénomènes.

1° Partons de valeurs initiales θ_0 et s_0 négatives, ce qui revient à supposer que l'on commence à chauffer l'étuve ; l'équation (α''') donne alors :

$$(13) \quad s = \theta_1 + \frac{\rho'c(\theta_0 - \theta_1)e^{-\rho \frac{t}{c}} + [\rho c'(\theta_1 - s_0) + \rho'c(s_0 - \theta_0)]e^{-\frac{c'}{\rho'}t}}{\rho'c - \rho c'}$$

s s'annule à un certain instant t' ; à ce moment θ a une certaine valeur θ_0' ; l'interrupteur z s'ouvre et l'équation (β''') donne :

$$(14) \quad s = \theta_2 + \frac{\rho'c(\theta_0' - \theta_2)e^{-\rho \frac{t}{c}} + [\rho c'\theta_2 - \rho'c\theta_0']e^{-\frac{c'}{\rho'}t}}{\rho'c - \rho c'}$$

équation dans laquelle, pour simplifier, les temps sont comptés à partir de l'instant t' . Au bout du temps t'' , s s'annule à nouveau ; θ a alors une valeur θ_0'' , et à partir de cet instant pris comme nouvelle origine des temps, on a

$$(15) \quad s = \theta_1 + \frac{\rho'c(\theta_0'' - \theta_1)e^{-\rho \frac{t}{c}} + [\rho c'\theta_2 - \rho'c\theta_0']e^{-\frac{c'}{\rho'}t}}{\rho'c - \rho c'}$$

et ainsi de suite. Avec ces notations, t'' , t''' ... représenteront les *durées* successives d'ouverture et de fermeture de l'interrupteur ; θ_0' , θ_0'' ... sont les *écarts* maxima de la température de l'étuve à partir de la valeur T à maintenir.

La figure 5 représente la variation de s et θ (calculées) pour une étuve que nous avons employée au traitement thermique du sélénium et pour laquelle on avait, dans les conditions de l'expérience

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 312^\circ & T &= 210^\circ & \theta_2 &= 85^\circ \\ \frac{\rho}{c} &= 0,004 & \frac{\rho'}{c'} &= 0,024 \end{aligned}$$

Dans tous les cas où le retard ε est nul :

1° Les *durées* successives t'' , t''' ... d'ouverture et de fermeture de l'interrupteur vont en tendant vers 0 ; il est clair que cette conclusion théorique cesse d'être applicable à partir

du moment où le très petit retard dû à l'inertie des pièces de l'interrupteur et à la self de l'électro ⁽¹⁾ est de l'ordre de

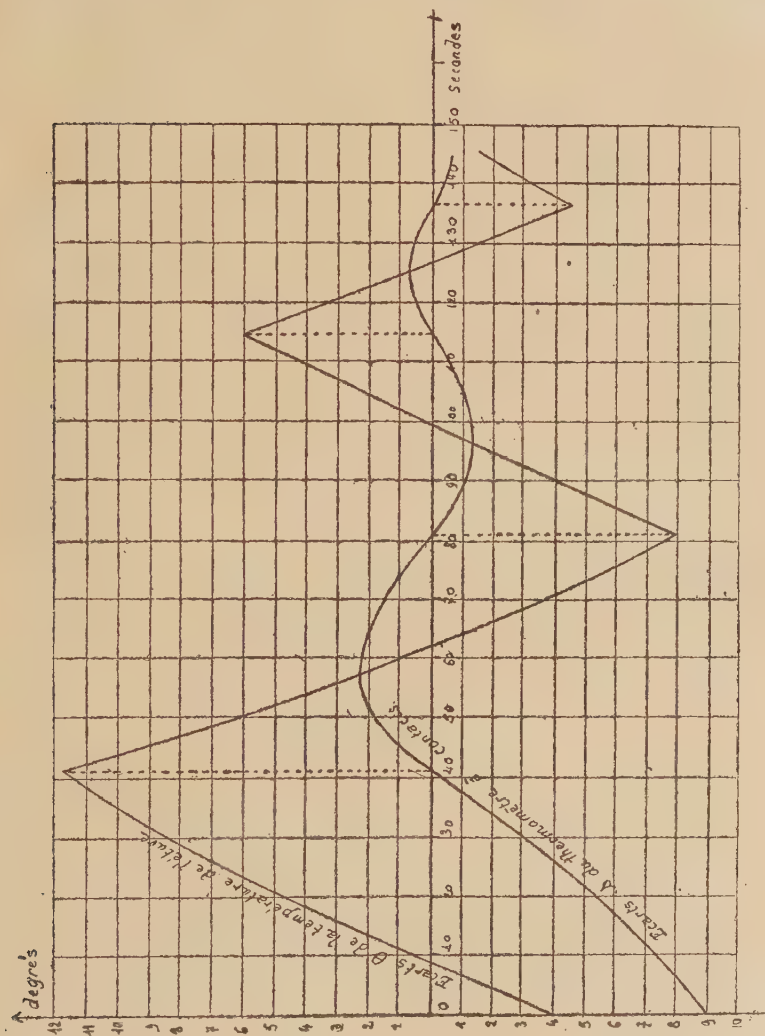


Fig. 5.

grandeur des durées précédentes (à ce moment il n'est

(1) La propagation de la chaleur dans l'étuve intervient également (voir note IV).

plus légitime de considérer ε comme négligeable). Nous pouvons donc dire qu'en pratique, le fonctionnement de l'interrupteur tend vers un régime vibratoire plus ou moins rapide (voir Note IV in fine).

2° Les écarts θ'' , θ''' — vont également en tendant vers 0 ;

3° La température de l'étuve est égale à celle du thermomètre aux instants où cette dernière est maximum ou minimum — propriété qui se déduit immédiatement de l'équation (2").

4° Si ε était réellement nul, il n'y aurait plus de régime périodique, même à la limite. Mais dans tous les cas, bien que les écarts de température finissent par tendre vers zéro ; il faut un temps considérable pour obtenir une régulation acceptable. -

Par contre, en attendant suffisamment longtemps, et la température ambiante étant toujours supposée constante, nous pourrions théoriquement obtenir une régulation aussi approchée que nous voudrions — le régulateur ouvre et ferme alors le circuit un grand nombre de fois par seconde.

Nous verrons plus loin que cette précision illimitée est tout à fait illusoire dans le cas, le seul intéressant en pratique, où la température ambiante τ est variable.

10. — CAS GÉNÉRAL

Supposons enfin que ni ε , ni $\frac{c'}{\rho}$ ne soient négligeables, la température ambiante τ restant toujours constante.

Nous pourrions facilement, d'après ce qui précède, prévoir ce qui se passera : θ tendra à se rapprocher de plus en plus, mais lentement, d'un certain régime périodique limite ; il s'en rapprochera d'autant plus lentement que $\frac{c'}{\rho}$ sera plus grand.

Les équations du problème sont les mêmes qu'au § 9 ; la seule différence consiste en ce que, au lieu de raccorder

leurs intégrales aux instants où s s'annule, le raccordement s'effectue un temps ε plus tard.

Dans la *Note I*, à la fin de ce travail, nous démontrons l'existence de ce régime périodique limite et nous montrons comment on peut en calculer les éléments. Le calcul étant long et nous intéressant actuellement seulement par son résultat, nous n'avons pas cru devoir le placer dans le texte.

Les propriétés essentielles de ce régime périodique sont les suivantes.

1° *Il n'est atteint qu'au bout d'un temps d'autant plus long que $\frac{c'}{c}$, est plus petit ;*

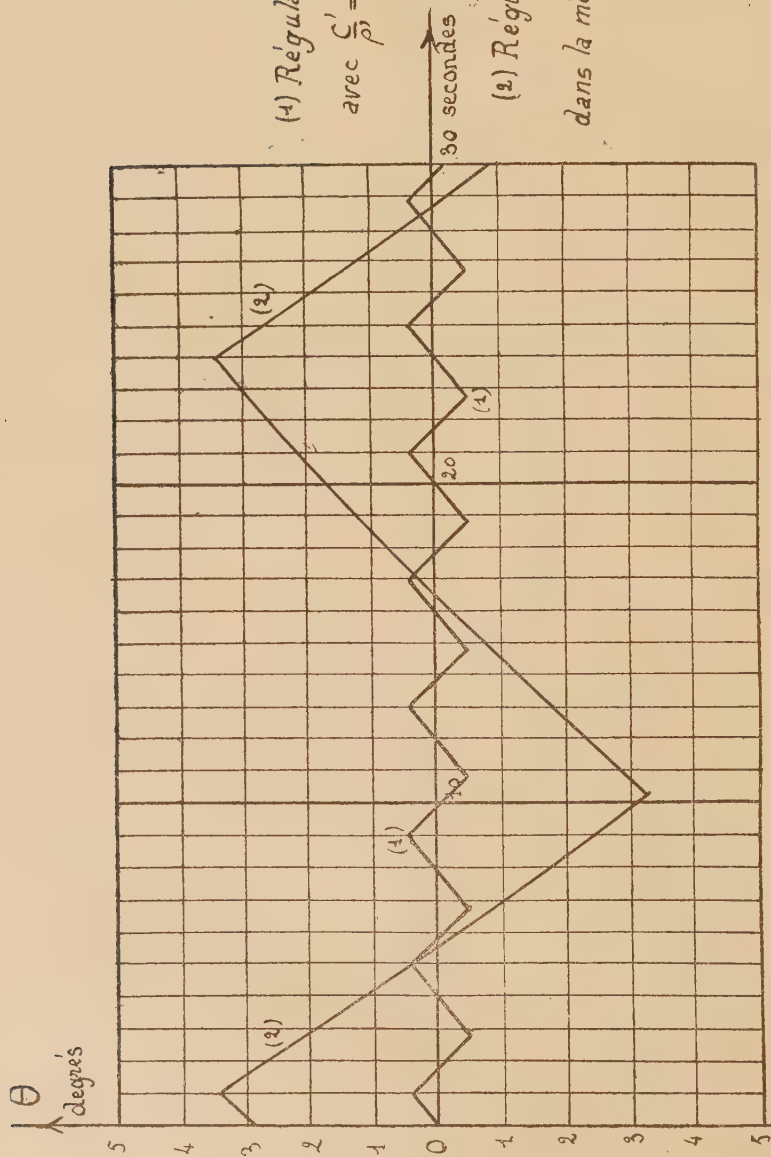
2° *Il n'est pas du tout le même que le régime périodique (déterminé au § 6) et qui, toutes choses égales d'ailleurs, correspondrait au cas où $\frac{c'}{c}$, serait négligeable ; en particulier, les écarts θ y sont beaucoup plus considérables.*

A titre d'exemple, avec la même étuve que celle qui a été étudiée sur la figure 5, les mêmes valeurs de $\frac{c}{c}$, θ_1 , θ_2 , nous avons construit figure 6 ;

1° *Le régime périodique (étudié au § 6) correspondant au cas où $\varepsilon = 1$ seconde, mais où $\frac{c'}{c}$ est nul ;*

2° *Le régime périodique limite, avec les hypothèses $\varepsilon = 1$ seconde et $\frac{c'}{c} = 0,024$ (même thermomètre que celui dont les constantes avaient servi au calcul de la figure 6, avec alors $\varepsilon = 0$).*

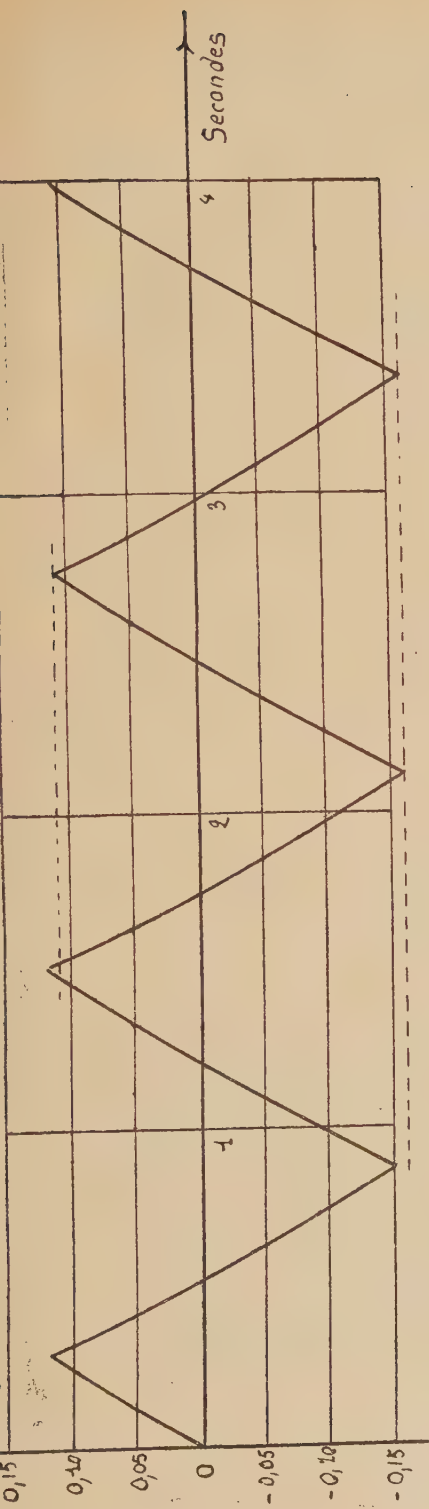
La comparaison des deux courbes montre à l'évidence à quel point il y a intérêt à rendre $\frac{c'}{c}$ aussi petit que possible ; l'étude des fluctuations extérieures va encore augmenter la force de cette conclusion.



(1) Régulation obtenue
avec $\frac{C'}{P} = 0$, $E = 1 \text{ sec}$

(2) Régulation limite réalisée

dans la même étude quand $\frac{P'}{C} = 0,024$



↑ Température ambiante τ

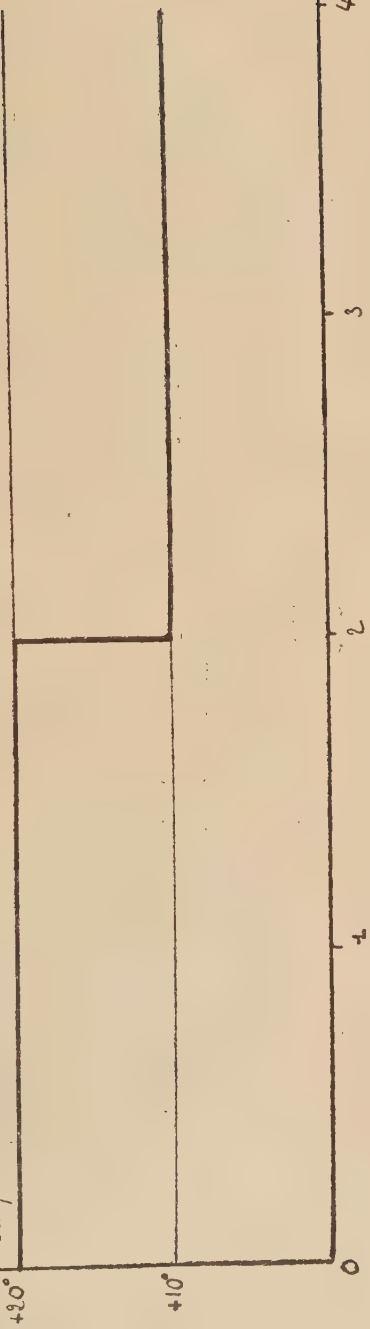


Fig. 7.

11. — INFLUENCE DES VARIATIONS DE LA TEMPÉRATURE AMBIANTE

Cherchons la perturbation apportée au fonctionnement des régulateurs précédents par une brusque variation de la température ambiante (causée par exemple par un courant d'air froid). Elle se traduit, dans nos équations, par une brusque variation de θ_1 et θ_2 , qui se trouvent remplacés par des valeurs plus faibles θ'_1 , θ'_2 .

1^{er} cas particulier où $\frac{c'}{\rho} = 0$. — L'établissement du régime périodique étant instantané ainsi que nous l'avons vu au § 6, le deuxième régime, correspondant à θ'_1 , θ'_2 , succédera immédiatement au premier *sans qu'il se produise de ce fait aucun écart anormal de température*.

L'appareil corrige donc *très bien* les fluctuations extérieures possibles ; la figure 7, qui correspond à la même étuve que nous avons déjà considérée dans les paragraphes précédents (avec $\frac{c'}{\rho} = 0$ et, cette fois $\varepsilon = 0,3$ sec.) montre le peu d'influence d'une très notable variation de la température ambiante. En effet, τ passant brusquement de 20° à 10° , l'amplitude Θ des écarts est insensiblement modifiée ; la période varie un peu et passe de 1 sec, 24 à 1 sec, 24.

2^o cas général où $\frac{c'}{\rho}$ n'est pas nul. — Puisque, dans ce cas, le régime périodique limite s'établit lentement à partir de données initiales qui ne correspondent pas à un point de la courbe limite, toute variation de la température ambiante n'est suivie que longtemps après du retour au nouveau régime limite, *l'influence des variations de τ est donc considérable, et peut entraîner des écarts anormaux de s et de θ* .

Ce qui précède suffit maintenant à nous donner une idée nette de l'influence des divers facteurs, θ_1 , θ_2 , ε , $\frac{c'}{\rho}$; avant de conclure, remarquons toutefois que, dans le premier cas, il est nécessaire que θ_1 , et θ_2 soient suffisamment

écartés pour que, quand τ varie, l'une des quantités θ_1 ou θ_2 ne devienne pas très petite par rapport à l'autre ; car autrement, la formule (9) montre que la période p devient très grande, sans inconvénient appréciable d'ailleurs en ce qui concerne la précision, mais il ne reste plus qu'une très petite marge possible pour les fluctuations de τ dans un certain sens. Cela revient à dire ce que nous avons déjà signalé au § 6 : une grande précision de régulation et une grande marge de variations possibles pour τ sont des conditions incompatibles.

A fortiori en est-il ainsi dans le cas général où $\frac{c'}{\rho'}$ n'est pas nul.

12. — CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE THÉORIQUE

DES THERMOSTATS DISCONTINUS

De ce qui précède, nous retenons que les thermostats pour le thermomètre desquels $\frac{c'}{\rho'}$ peut être considéré comme négligeable sont *incontestablement les meilleurs*, surtout quand la température ambiante est sujette à de notables variations. C'est pourquoi nous avons étudié ces appareils d'une manière beaucoup plus détaillée. Cette conclusion condamne naturellement les nombreux appareils qui utilisent des thermomètres à gaz ou même à liquides peu conducteurs et de grande chaleur spécifique. Toutefois, *si la température extérieure ne varie que peu et très lentement*, l'on pourra les utiliser pour une régulation approchée, et, en fait, ils ont souvent donné satisfaction dans ce cas.

Les avantages des thermostats pour lesquels $\frac{c'}{\rho'}$ est négligeable sont :

- 1° De corriger presque instantanément toutes les perturbations dues aux variations extérieures de température ;
- 2° De permettre, par des expériences et des calculs simples

et rapides, un réglage systématique et une prédétermination certaine de la précision que l'on obtiendra.

Ces avantages, qui ressortent de l'étude effectuée dans les pages précédentes, nous conduisent donc à cette conclusion pratique que les thermomètres les plus avantageux à utiliser pour la commande des régulateurs discontinus seront les résistances bolométriques à grande surface, les spirales bimétalliques en lames minces, ou enfin des couples thermoélectriques suffisamment déliés ; pour de tels thermomètres en effet, $\frac{c'}{\rho}$ peut être négligé en général.

Enfin, lorsqu'une très grande précision est nécessaire, l'on peut utiliser, pour obtenir un intervalle d'emploi suffisant, un montage en « cascade » et une double enceinte. Dans la première enceinte, la température est maintenue *approximativement* constante, malgré de notables variations de la température ambiante, à l'aide d'un thermostat pour lequel $\frac{c'}{\rho}$ est négligeable, et ayant un intervalle d'emploi suffisamment grand. L'étuve, placée dans cette enceinte, peut alors être réglée par un thermostat dont la précision a été exagérée, aux dépens de l'intervalle d'emploi.

13. — EXPÉRIENCES DE VÉRIFICATION. PRINCIPE ET MONTAGE

On possède un nombre considérable de donnée numériques sur les thermostats usuels ; presque tous les auteurs cités dans notre bibliographie ont donné des tableaux d'écarts observés entre la température d'un thermomètre placé dans l'étuve et la température à maintenir — ou la variation de la température de ce thermomètre. Malheureusement, ces données numériques sont tout à fait inutilisables ; pour des raisons diverses, mais qui tiennent toutes, en réalité, à ce que ces résultats ont été notés un peu au hasard et en l'absence du fil conducteur que constitue la théorie des appareils.

En particulier, — sauf dans un travail de G. Gouy déjà cité — il n'est généralement pas fait mention de la période des oscillations.

D'autre part, on ignore la valeur du $\frac{\rho''}{c''}$ pour le thermomètre *de mesure* : les écarts donnés sont donc une fonction inconnue s' des écarts réels θ , donnés par l'équation

$$\frac{c''}{\rho''} \frac{ds'}{dt} + s' = \theta.$$

Enfin, les valeurs figurant sur les tableaux sont généralement notées à intervalles de temps égaux et assez longs (une heure, par exemple) et tombent en des points quelconques de la courbe périodique, points qui n'ont aucune raison d'être des maxima.

Pour toutes ces raisons, nous nous sommes livrés à une série d'expériences portant principalement sur le cas particulier le plus intéressant ($\frac{c'}{\rho'}$ négligeable) afin de voir si les théories précédentes trouvent une confirmation pratique suffisamment exacte, pour qu'elles puissent être d'une réelle utilité dans l'emploi et le réglage de ces thermostats.

Voici la marche de ces expériences.

1° *Réalisation rigoureuse de $\frac{c'}{\rho'} = 0$.* — Cette condition revient à dire qu'il ne doit exister aucune différence entre la température de l'étuve et celle du thermomètre qui commande le régulateur. Un moyen très simple de réaliser cette condition consiste à *utiliser l'étuve elle-même comme thermomètre à air, après l'avoir rendue étanche*

L'étuve en expérience (fig. 8) est un ballon de 2 litres de capacité environ contenant une résistance R qui peut être mise en parallèle avec une résistance extérieure R', et est toujours en série avec le rhéostat de lampes R''. La mise en parallèle est effectuée par le relais et l'électroaimant S.

La ballon B est étanche, il communique, d'une part, avec une capsule manométrique M, d'autre part avec un

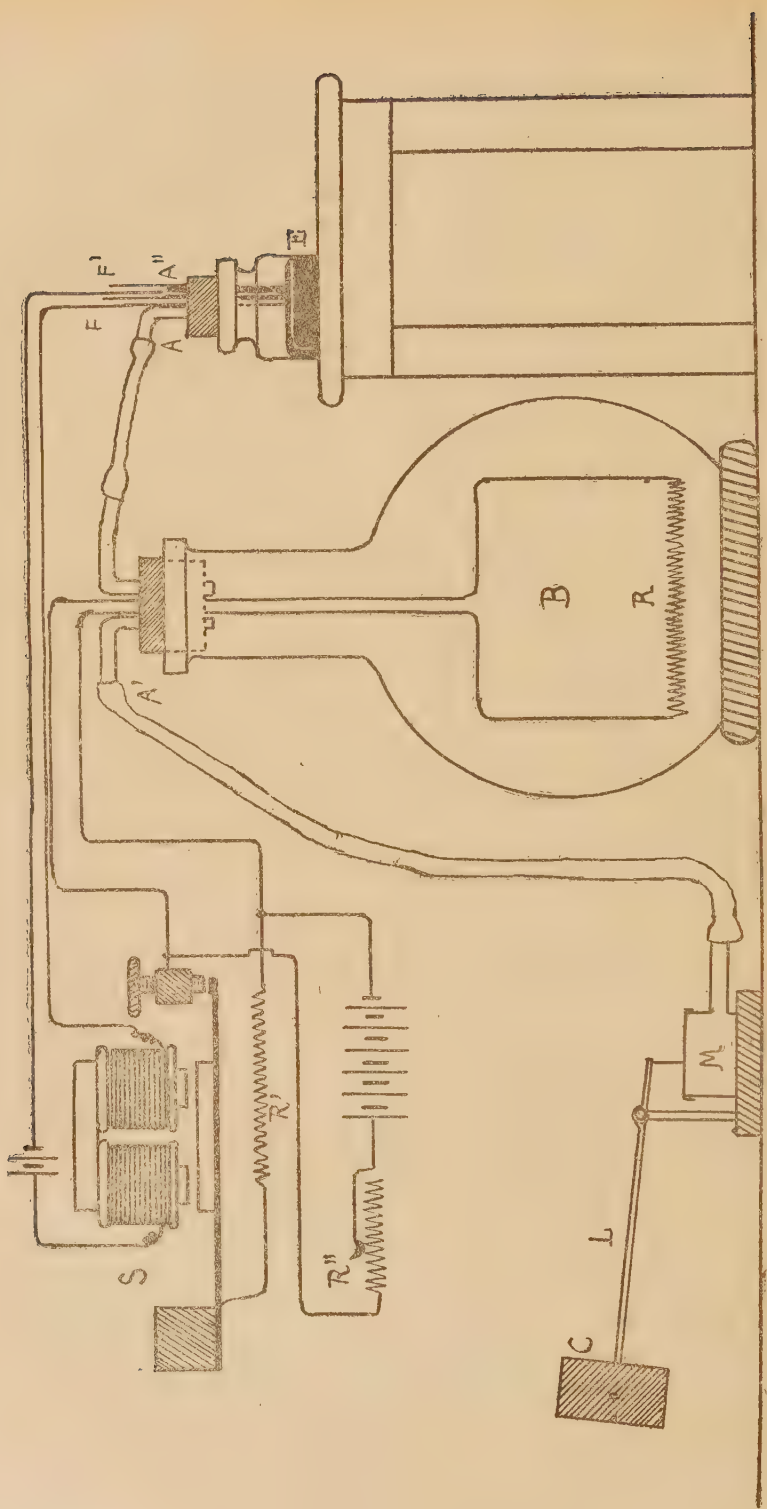


Fig. 8.

petit flacon large E, dont le fond est rempli de mercure où plonge un petit tube de verre A". L'étuve sert donc de réservoir à un thermomètre à air à volume sensiblement constant, les variations de pression se traduisent par des variations de niveau du mercure dans le tube A" et, simultanément, par de très légères variations de la concavité de la membrane fermant la capsule manométrique.

L'on s'arrange pour que le volume d'air non chauffé soit aussi réduit que possible ; c'est uniquement pour une raison de clarté, que, sur la figure 8, les dimensions de E, A", M ont été exagérées par rapport à celles de B. Tous ces organes sont groupés très près du ballon ; la capsule manométrique n'a que 12 millimètres de diamètre et 3 millimètres de hauteur.

Cela posé, l'une des extrémités F du circuit de l'électro plonge dans le mercure de E, l'autre F' aboutit dans le tube A" à une hauteur réglable. Le fonctionnement de l'appareil est évident,

2° *Enregistrement des courbes de température.* — La membrane de caoutchouc que porte la capsule M agit par l'intermédiaire d'un fil, sur l'extrémité d'un levier rigide et très léger L (paille très fine) qui porte à l'autre extrémité un petit écran C en papier noir, percé d'un trou d'aiguille. Il se déplace dans le plan-objet d'une lanterne à projection, qui envoie son image renversée et amplifiée sur un cylindre enregistreur à axe vertical portant une feuille de papier au gélatino-bromure d'argent.

Au moyen d'écrans convenables, l'on a soin de protéger le cylindre contre toute la lumière autre que l'image du trou d'aiguille.

3° *Réglage.* — Si l'on se reporte aux équations du § 6, on remarque que les équations ne contenant que des écarts s et 0 , peu importe la valeur que nous fixerons pour T ; seul le coefficient de rayonnement ρ , au sens où nous l'avons défini, dépendra un peu de T . Nous n'avons donc pas cherché à réaliser une température *donnée*, et nous sommes simple-

ment préoccupé de réaliser une température *constante*, en faisant varier les paramètres ε , θ_1 , θ_2 pour étudier leur influence.

Le réglage est alors très simple. Il comporte :

1° Les réglages de R, R', R'' de manière à obtenir entre les température d'équilibre quand le régulateur est bloqué, un écart donné $\theta_1 - \theta_2$.

2° Le réglage de la pression moyenne à l'intérieur de l'étuve ; afin d'éviter toute surpression exagérée, l'on s'arrange pour que la pression dans le ballon qui joue le rôle d'étuve, soit sensiblement égale à la pression atmosphérique pour une certaine valeur de θ (d'ailleurs inconnue) comprise entre θ_1 et θ_2 ;

3° On règle ensuite la position du fil F' de manière que le contact ait lieu aussi pour θ compris entre θ_1 et θ_2 .

4° Reste à faire varier le retard ε ; ce résultat s'obtient en fixant à l'armature de l'électro une palette qui se meut dans de la glycérine, sur une profondeur plus ou moins grande ; on peut, par ce moyen et en agissant ainsi sur l'intensité du courant dans le circuit de l'électro, obtenir un retard quelconque compris entre 0,1 et 2,3 secondes.

L'étalonnage du thermomètre à air constitué par l'étuve elle-même, au voisinage de la température à maintenir T est effectué d'une façon spéciale que nous allons étudier.

14. — ETALONNAGE DE L'APPAREIL. THERMOMÈTRE BALISTIQUE

On ne peut songer à étalonner l'appareil à capsule manométrique qui servira à la détermination des écarts θ par l'intermédiaire des surpressions correspondantes, en plaçant un thermomètre dans l'étuve et en notant son indication pour une déviation donnée de l'écran percé d'un trou qui sert à repérer les variations de pression ; ce thermomètre nous indiquera, en effet, non plus $T + \theta$, mais une certaine température $T + s'$, s' étant lié à θ par une équation analogue à l'équation (2).

Nous avons donc cherché à étalonner l'appareil en y produisant le brusque dégagement d'une certaine quantité de chaleur et en calculant la surpression correspondante.

La méthode repose sur le théorème suivant, dont nous rappelons la démonstration :

Etant donné un récipient fermé A, contenant une certaine masse d'un gaz parfait, si nous y produisons brusquement le dégagement d'une certaine quantité de chaleur Q, il en résulte une surpression indépendante de la répartition des températures en chaque point du gaz, après le dégagement de chaleur (le récipient A étant supposé à parois rigides et imperméables à la chaleur).

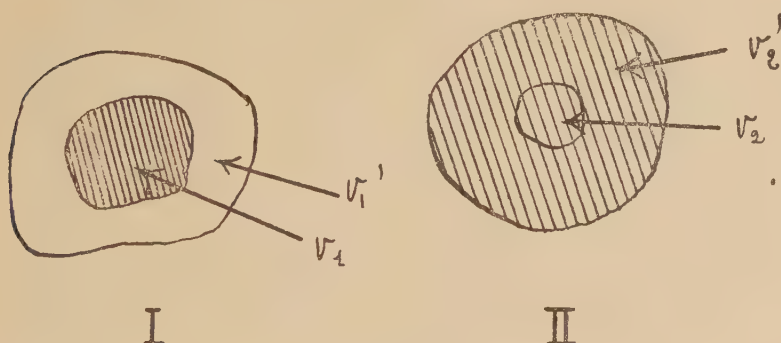


Fig. 9.

Il suffit évidemment de prouver que l'on obtient le même résultat en dégageant la chaleur Q dans une portion de la masse gazeuse, ou, au contraire, dans tout le volume ; une intégration permettra alors d'étendre la propriété à une distribution de température quelconque.

Il revient encore au même de démontrer que le passage du système I (fig. 8) où le dégagement de chaleur a été localisé, au système II où le dégagement de chaleur a été réparti uniformément, s'effectue adiabatiquement et à volume constant sans variation de pression, ou encore à pression constante sans variation de volume. C'est cette

dernière forme que nous adopterons, en supposant que, pour réaliser le passage de I à II, on attende que l'équilibre de température s'établisse à l'intérieur de A. Nous supposerons donc la pression constante et égale à p , et nous admettrons que les volumes peuvent varier: nous aurons à démontrer l'invariance du volume total de gaz.

Soient en effet

$$\left. \begin{array}{ll} T_1 & T_1' \text{ les températures absolues} \\ m_1 & m_1' \text{ les masses} \\ v_1 & v_1' \text{ les volumes} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{des deux portions de gaz} \\ \text{dans le système (I)} \end{array}$$

et:

$$\left. \begin{array}{ll} T & \text{la température uniforme} \\ v_2 & v_2' \text{ les volumes} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{des deux portions de gaz} \\ \text{dans le système (II)} \end{array}$$

Par hypothèse, la pression p n'a pas changé. D'autre part si R est la constante des gaz parfaits *rapportée à l'unité de masse*, nous avons évidemment:

$$\begin{array}{ll} pv_1 = m_1 RT_1 & pv_2 = m_1 RT \\ pv_1' = m_1' RT_1' & pv_2' = m_1' RT \end{array}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{v_1 + v_1'}{mT_1 + m_1'T_1'} = \frac{v_2 + v_2'}{(m + m_1')T}.$$

Soit c' la chaleur spécifique à *pression constante* du gaz considéré. Si nous écrivons que le passage de (I) à (II) s'effectue sans dégagement ni absorption de chaleur nous avons

$$m_1 c'(T - T_1) + m_1' c'(T - T_1') = 0,$$

et l'équation précédente donne immédiatement

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

ce qui démontre la proposition: le passage d'un système à l'autre s'effectue sans dégagement de chaleur, sans variation de volume ni de pression, et sans qu'aucun travail extérieur soit par conséquent accompli:

L'on pourrait tirer de cette proposition des applications intéressantes, notamment en ce qui concerne la mesure quasi instantanée des quantités de chaleur; l'équilibre de pression dans un système étant en effet atteint très rapidement, la mesure de la pression, d'où l'on pourrait déduire la quantité de chaleur dégagée indépendamment de toute répartition des températures, peut s'effectuer avant que le système n'ait eu le temps de rayonner une quantité appréciable de chaleur au dehors.

Nous laissons ces applications de côté pour ne nous occuper que de ce qui nous intéresse actuellement, à savoir l'étalonnage du thermomètre à gaz constitué ici par l'étuve elle-même (ballon B de la figure 8).

On produit pendant un temps exactement connue t et déterminé par un pendule à contacts, le passage d'un courant i dans une petite résistance auxiliaire; on calcule d'après la masse de gaz enfermée dans B l'élévation de température *qui en résulterait si la température était uniforme*; par suite du théorème démontré, nous observerons la même surpression si la température n'est pas uniforme. Cette surpression est enregistrée sur le cylindre qui porte le papier sensible: nous établissons ainsi une correspondance entre *des écarts de température calculés à partir de mesures électriques et de mesures de temps, et les indications de l'enregistreur, observées.*

Pour les expériences dont on trouvera les courbes plus loin, nous avons

$$t = 0,3 \text{ seconde}$$

$$i = 2 \text{ ampères, } r = 3,80 \text{ ohms}$$

d'où

$$q = 1,099 \text{ calories}$$

Masse de gaz $m = 2,64 \text{ gr.}$, d'où à volume constant une masse en eau de :

$$M = 2,64 \times 1,4 \times 0,238 = 0,879 \text{ gr.}$$

l'élévation de température *calculée*, qui résulterait d'une répartition uniforme de température, serait donc :

$$\Delta\theta = \frac{1.099}{0.879} = 1,25.$$

Or on observe sur le papier sensible une élancement très sensiblement égale à 7,5 mm. (la largeur du trait ne permet pas une lecture plus précise); d'où nous concluons que les lectures d'ordonnées de nos courbes photographiques s'effectueront à raison de 6 millimètres par degré.

15. — RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES

Nous avons obtenu les courbes des figures 10, 11, 12, 13 et 14, ⁽¹⁾ sur toutes, les 18 centimètres de papier sensible



Fig. 10.

correspondent à 67 secondes. Sur la première seule l'échelle des températures est 6 millimètres par degré. Sur les autres,



Fig. 11.

elle est 16 millimètres par degré, le cylindre ayant été éloigné de manière à obtenir des amplitudes plus grandes.



Fig. 12.

L'on remarque que, contrairement à ce qui est visible sur les figures 6 et 7, les portions de courbes exponentielles obtenues, qui sont d'allure très nette, ne sont pas assez

(1) reproduites ici à l'échelle $\frac{1}{2}$.

petites pour paraître rectilignes; cela tient à ce que nous avons retardé l'électro-aimant (palette dans de la glycérine) et écarté θ_1 et θ_2 de manière à obtenir des courbes tout à fait lisibles.



Fig. 13.

On remarquera encore que les raccordements des courbes de chauffage et de refroidissement sont assez fortement arrondis, ce qui tient probablement à l'absence de brassage



Fig. 14.

mécanique, difficile à réaliser au fond d'un ballon. Nous nous étions contenté d'utiliser une résistance chauffante à très grande surface.

La figure 14 met en évidence un défaut du thermomètre à air à volume constant qui se présente quand le tube A' est trop large. Si en effet l'on désigne par x la hauteur du mercure dans ce tube, par σ sa section, par p_1 la pression atmosphérique, par p la pression dans le ballon et ρ la densité du mercure, les mouvements du mercure dépendent de l'équation :

$$\rho \sigma x \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} = (p - p_1) \sigma - \rho g \sigma x$$

soit r le rayon du tube; les frottements définis par le coefficient A sont proportionnels à la surface de contact entre le mercure et le tube, soit encore à $2\pi r x$, et nous pouvons poser

$$A = \pi r x \rho B$$

d'où

$$(16) \quad x \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{r} x \frac{dx}{dt} = \frac{(p - p_1)}{\rho} - gx.$$

Si nous employons un tube *de très petit rayon*, $\frac{B}{r}$ est très grand les mouvements du mercure sont apériodiques, mais très lents, et nous introduisons de ce fait un retard préjudiciable à la bonne marche de l'appareil. Mais si, au contraire, *r est trop grand*, le terme $\frac{B}{r}$ est négligeable, et l'équation (16) admet des solutions oscillantes. Nous superposons alors, aux oscillations propres du système thermostatique, régulières et calculables, d'autres oscillations dépendant de l'équation (16), ce qui rend le phénomène complexe. La courbe 14 a été obtenue dans ces conditions, en diminuant d'ailleurs le retard ε de manière à ne pas avoir des amplitudes exagérées. Le phénomène réel semble d'ailleurs très complexe et les courbes obtenues expérimentalement sont beaucoup moins régulières que celles qui résulteraient de la superposition de deux oscillations (fig. 14).

CHAPITRE II

THERMOSTATS CONTINUS

THERMOSTAT CONTINU ÉLECTROMAGNÉTIQUE

16. — EQUATIONS GÉNÉRALES DU PROBLÈME

Nous ne revenons pas en détail sur les *conditions* de la régulation, étudiées au début du chapitre I. Nous disposons :

1° D'une *source de chaleur* dont l'intensité $\varphi(x)$ [quantité de chaleur cédée par seconde à l'étuve] dépend d'un paramètre x définissant le déplacement de certains organes mécaniques ; d'où l'équation :

$$(1') \quad c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho[T + \theta - \tau] = \varphi(x).$$

2° D'un *thermomètre* dont les échanges de chaleur avec l'étuve dépendent de :

$$(2) \quad c' \frac{ds}{dt} = \rho'(\theta - s).$$

3° Enfin, d'un *système mécanique* réglant la source de chaleur, commandé par le thermomètre, et dont le mouvement est régi par une équation de la forme

$$(3') \quad M \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} = \Psi(s, x).$$

Telles sont les équations du problème. Nous allons d'abord en envisager l'application à des appareils continus de type classique (schématisé), et nous allons voir que ce

ne sont pas de véritables thermostats, la température moyenne qu'ils tendent à maintenir dans l'étuve étant en effet, non pas une constante, *mais une certaine fonction de la température ambiante*. A ce titre, ils sont très inférieurs aux appareils discontinus.

17. — THERMOSTATS CONTINUS OU LE RÉGLAGE DÉPEND DE LA VARIABLE THERMOMÉTRIQUE

Nous ne décrivons pas tous les appareils de ce type ; il nous suffit de renvoyer aux descriptions originales (Réf. 1, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 20, 21, 43). Généralement, le mercure d'un thermomètre à air à pression constante obture plus ou moins une arrivée de gaz (fig. 13) ou bien une tige dilatable réduit une section de passage de gaz (fig. 16) ; on a encore utilisé une capsule manométrique, le déplacement d'un flotteur posé sur un liquide dont la densité varie avec la température, etc.

Nous voyons que le caractère commun de ces appareils continus est d'utiliser à la commande de l'organe régulateur proprement dit la variable géométrique qui, dans un thermomètre quelconque, sert ordinairement à lire la température sur une échelle divisée convenable.

Étudions, par exemple, la théorie de l'appareil de la figure 16, qui comporte comme thermomètre un système formé d'un tube et d'une tige inégalement dilatable. Négligeons les phénomènes d'inertie mécanique, qui n'ont évidemment aucun rôle ici, étant donnée la lenteur des allongements ou contractions ; cela revient à relier s et x par une équation finie au lieu de l'équation différentielle (3') ; cette relation est d'ailleurs évidemment linéaire, de sorte qu'en définitive nous pouvons écrire

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \frac{d\theta}{dt} + c' \frac{ds}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = as + b \\ c' \frac{ds}{dt} = \rho'(\theta - s) \end{array} \right.$$

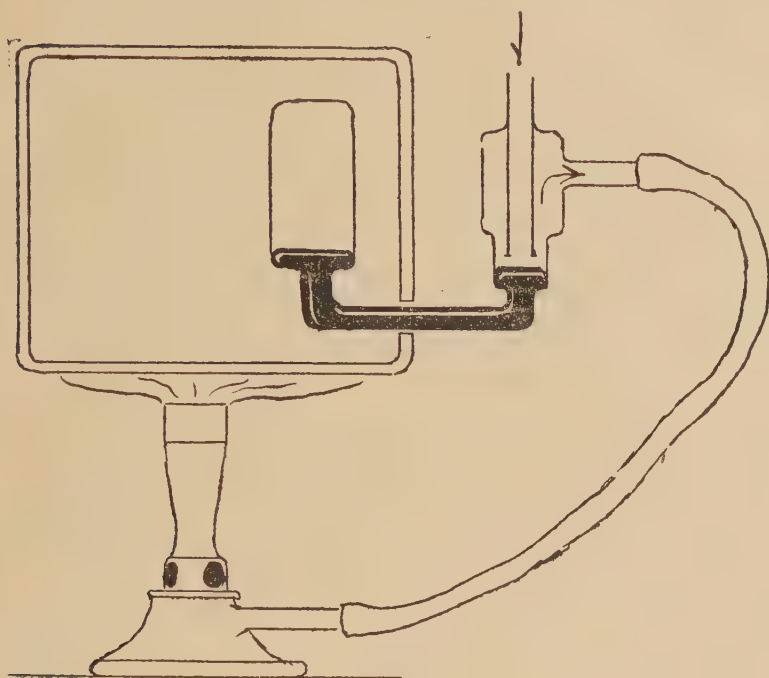


Fig. 15.

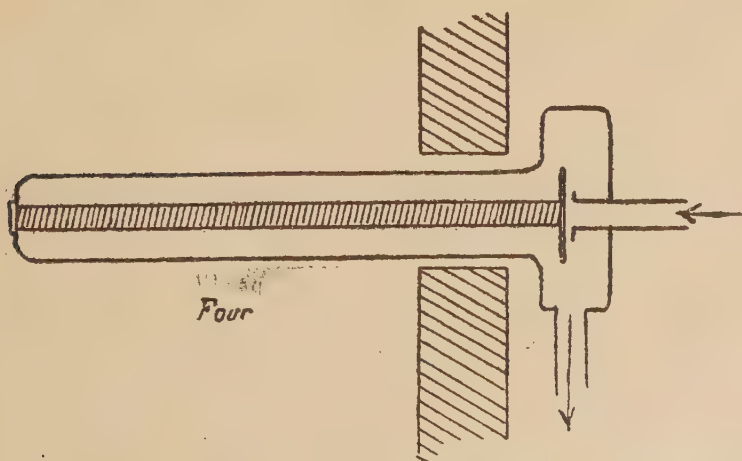


Fig. 16.

d'où nous tirons :

$$(18) \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \left[\frac{c+c'}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right] + s \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) = \tau + \frac{b}{\rho} - T.$$

Si nous voulons que l'appareil tende à maintenir la température T , il faudra le régler — c'est-à-dire agir convenablement sur a et b par déplacement et modification de section du tube qui est en face du plateau porté par la tige dilatible — de manière que l'équation (18) admette comme régime d'équilibre la solution $s = 0$; ce qui nous donne la condition

$$\tau + \frac{b}{\rho} - T = 0 \quad \text{d'où} \quad b = \rho(T - \tau).$$

Réalisons ce réglage quand la température ambiante a la valeur τ_0 ; il ne l'est plus pour une autre valeur τ de cette température.

Le régime d'équilibre résultera en effet alors de

$$s \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) = \tau + \frac{b}{\rho} - T$$

avec

$$b = \rho(T - \tau_0)$$

d'où nous tirons :

$$(19) \quad s = \frac{\rho(\tau - \tau_0)}{\rho - a}.$$

Ainsi, toute fluctuation $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ de la température extérieure, agit à l'intérieur sur la température limite d'équilibre, modifiée toutefois par le coefficient $\frac{\rho}{\rho - a}$, qui est plus petit que 1 puisqu'il résulte des équations (17) que a doit être négatif pour qu'il y ait tendance à la régulation.

Si $a = 0$ (source de chaleur constante) ce coefficient vaut 1 et la température intérieure subit intégralement les fluctuations extérieures, pourvu bien entendu que ces dernières soient assez lentes, puisqu'il s'agit d'un régime d'équilibre. Si $a < 0$, les fluctuations intérieures sont plus faibles que

les fluctuations extérieures, *mais il n'en reste pas moins vrai que l'appareil tend à maintenir, non pas une température constante, mais une température fonction linéaire de la température ambiante. Ce n'est donc pas un véritable thermostat.*

Il en serait évidemment de même pour l'appareil avec thermomètre à air de la figure 15, et tous les appareils pour lesquels la régulation s'obtient par action directe du paramètre thermométrique.

Encore faut-il remarquer que nous n'étudions ici *que le régime d'équilibre*; à cette cause d'erreur il y a lieu d'ajouter toutes les variations traduites par les équations différentielles du problème et qui expriment que la régulation n'est pas instantanée.

Ces appareils ne sont tolérables que lorsqu'il s'agit de maintenir d'une façon assez grossière la température d'un four; on peut alors négliger des fluctuations de quelques degrés, dues aux variations extérieures, devant la température élevée qu'il s'agit de maintenir. Mais ils présentent même dans ce cas d'autres inconvénients, dus à la grande valeur de $\frac{c'}{\rho}$, pour les thermomètres employés.

Enfin remarquons encore une autre cause d'erreurs, due aux variations possibles de a ou b , c'est-à-dire des paramètres de la source de chaleur (pression du gaz, par exemple); ces variations étaient sans influence sur la température moyenne maintenue par les thermostats discontinus étudiés au chapitre I (entre certaines limites bien entendu) et ne pouvaient influencer que sur l'intervalle d'emploi.

Pour toutes ces raisons, nous n'étudions pas plus avant des appareils qui ne sauraient être considérés comme des thermostats.

18. — THERMOSTAT CONTINU ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

DESCRIPTION ET PRINCIPE

Nous allons étudier maintenant un appareil que nous avons imaginé en 1919 et qui diffère complètement des précédents.

Soit à maintenir constante et égale à T la température de l'étuve E chauffée électriquement par la résistance immergée S .

Plongeons dans l'étuve la résistance bolométrique

$$R = R_T(1 + a\theta)$$

en métal à grand coefficient de température (nickel : $a = 6 \cdot 10^{-3}$) et équilibrons le pont dans l'un des bras duquel elle est intercalée pour $R = R_T$, les autre bras du pont étant en métal à coefficient de température nul.

Si, dans la diagonale galvanomètre, nous intercalons un relais, nous obtenons un appareil *discontinu* de principe classique et que nous avons déjà signalé au chapitre I (Réf. 31 pour exemple).

Mais, si nous voulons réaliser un appareil *continu*, nous voyons d'après les raisonnements du § 17 qu'il y aura une condition essentielle à remplir : *ne pas utiliser pour le réglage une variable thermométrique.*

Corrélativement, nous devons faire en sorte que l'équilibre du système régulateur ne soit rigoureusement possible, quelles que soient les conditions extérieures, que pour $R = R_T$.

Ceci prohibe l'introduction dans la diagonale galvanomètre, de tout galvanomètre ou relais possédant un couple antagoniste et dont, de ce fait, l'angle d'écart est une variable thermométrique, *mais nous montre en même temps la possibilité de réaliser une régulation continue rigoureuse par l'emploi d'un système en équilibre indifférent.*

Nous sommes ainsi, et presque fatalement, conduits au dispositif que j'ai employé depuis 1919, et dans lequel un

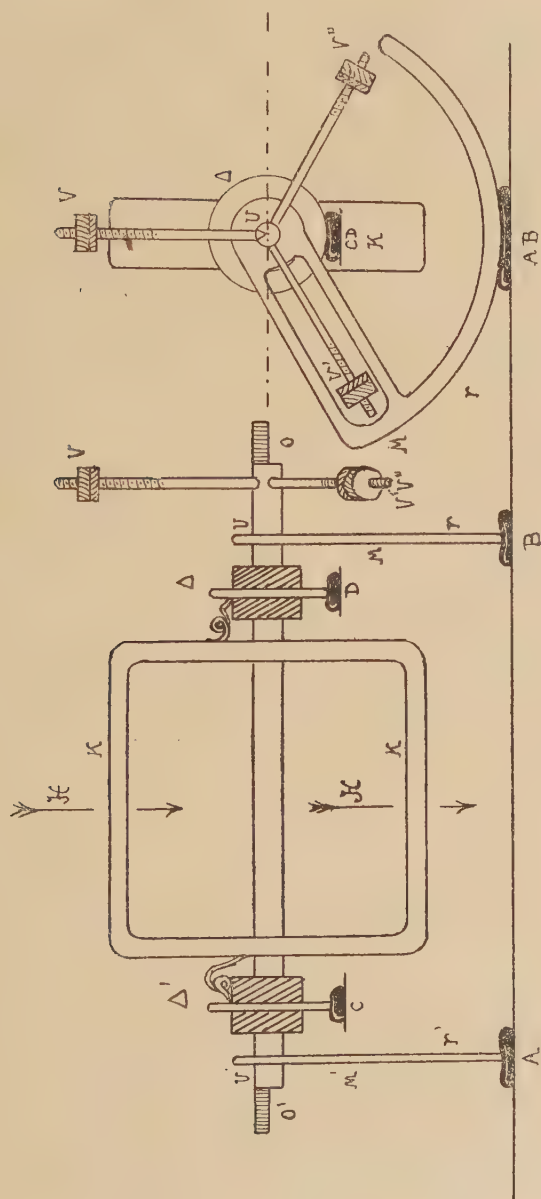


Fig. 17.

cadre galvanométrique K (fig. 17) porté par des couteaux, commande un petit rhéostat formé par deux arcs rr' en métal résistant, le tout en équilibre indifférent dans un champ sensiblement radial. La figure est purement schématique, nous étudierons plus tard la réalisation complète de l'appareil (chapitre III). Nous nous bornons à donner ici le nombre minimum de détails nécessaires à la claire compréhension du dispositif. Les dimensions du cadre sont notablement plus grandes que celles du cadre d'un galvanomètre ordinaire. Il est carré (condition optimum) et a, par exemple, 7 centimètres de côté. Les extrémités du fil qu'il porte sont reliées à deux disques $\Delta\Delta'$, en métal non amalgamable (nickel, si possible platiné) qui plongent dans les godets à mercure C et D reliés aux points Z et W du pont. (fig. 18).

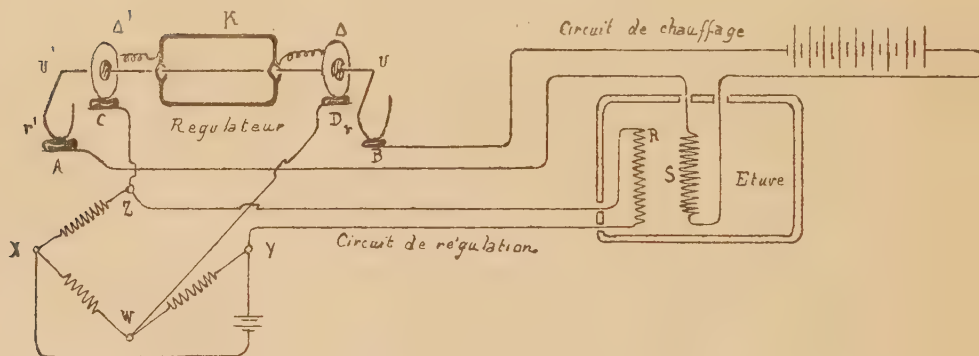


Fig. 18.

Le cadre K se trouve ainsi placé dans le bras ZW du pont, sans qu'aucun couple provenant de ressorts antagonistes puisse agir sur lui.

(Sur la figure 17, et par raison de simplicité, les aimants produisant le champ $\mathcal{H}$, les supports des couteaux OO' et ceux des godets C et D ne sont pas représentés.)

Les arcs de cercle rr' , en métal en grande résistivité, tournés et rigoureusement centrés sur l'axe, sont reliés électriquement et mécaniquement par l'axe tubulaire du système

mobile ; ils trempent dans les mercures A et B ; c'est la résistance $Ar'M'U'UMrB$, variable avec l'azimut du cadre, qui nous servira (directement ou indirectement) à régler continuellement le courant de chauffage de l'étuve.

Le réglage de l'équilibre indifférent s'obtient à l'aide des écrous $VV'V''$, et de trois petites vis (non représentées). Nous étudions au chapitre III les conditions de ce réglage.

19. — EQUILIBRE MÉCANIQUE DU RÉGULATEUR ISOLÉ. EQUILIBRE MÉCANIQUE, THERMIQUE ET ÉLECTRIQUE DU SYSTÈME ÉTUVE RÉGULATEUR PENDANT LE FONCTIONNEMENT.

Étudions d'abord les phénomènes d'équilibre très intéressants qui caractérisent le système régulateur précédent.

1^o Établissons sur le bras ZW une coupure, de façon qu'aucun courant ne puisse traverser le cadre K. Le système mobile est alors en équilibre dans n'importe quelle position. Si nous le lançons avec une vitesse angulaire quelconque ω , son mouvement, qui est défini par :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} = 0$$

est par conséquent

$$x = -\frac{M\omega}{A} \left[e^{-\frac{At}{M}} - 1 \right] + x_0.$$

Le système tend donc vers une *position d'arrêt*

$$x = x_0 + \frac{M\omega}{A}$$

qui n'est nullement une position d'équilibre, puisque nous la modifions à notre gré par variation de la vitesse angulaire initiale ω .

2^o Montons maintenant l'appareil dans le bras ZW comme il est indiqué figure 18, en observant une polarité telle, que le déséquilibre du pont dû à $R > R_T$ tende à faire tourner

le cadre mobile dans le sens où la résistance des arcs rr' va en croissant.

Considérons le système total comprenant l'étuve, la partie mécanique du régulateur, et les deux circuits de chauffage et de régulation.

Un état de ce système est défini par les variables :

x , $\frac{dx}{dt}$, θ , τ , et par les intensités i et I du courant traversant ZW et du courant de chauffage dans la résistance S.

Montrons que tout ce système thermo-électro-mécanique oscille maintenant autour d'une position d'équilibre stable, mais que cette position dépend de τ et de I .

En effet, comme le sens du courant i dans ZW se renverse quand la température de la résistance R, de trop élevée, devient trop petite, l'on voit que le cadre tend toujours à tourner dans un sens qui le ramène à l'azimut pour lequel les résistances rr' intercalées dans le circuit de chauffage donnent $i = 0$ d'où $R = R_T$ et par conséquent $\theta = 0$. Il y a donc une position d'équilibre stable pour la partie mécanique et thermique du système, cette dernière correspondant à $\theta = 0$.

Comme, d'autre part, dans cette position d'équilibre, la chaleur dégagée dans S compense exactement le rayonnement, l'on voit que la résistance correspondante des arcs rr' , et par conséquent l'angle x , dépendra de I et de τ .

En définitive, le système tend vers une position d'arrêt qui est en même temps une position d'équilibre ; θ est alors nul, et x a une valeur fonction de I et de τ .

Nous voyons ainsi que cet appareil est exempt du défaut grave des appareils étudiés au § 47¹ : les variations de τ et de I pourront influencer sur l'azimut x d'équilibre du cadre k , mais n'auront aucune action sur la température que l'appareil tendra à maintenir.

3° Invertissons les connexions précédentes. La position d'équilibre précédente subsiste, mais elle devient une position d'équilibre instable. En effet l'appareil tourne alors

dans un sens qui tend à augmenter l'écart θ . Corrélativement, l'équilibre est alors pratiquement irréalisable et l'appareil se « décroche » instantanément, les arcs rr' sortant des mercures A, B.

20. — EQUATION DU PROBLÈME

Nous supposons les 4 résistances du pont égales, à la température T ; nous verrons que c'est une condition optimum.

Soit alors K le moment d'inertie du cadre, $\mathcal{H}$ l'intensité du champ magnétique, supposé radial, S la surface *totale* des spires, E la f. e. m. des accumulateurs qui alimentent le pont.

Un écart θ donne à R_T la valeur $R [1 + a\theta]$, d'où, dans le cadre, un courant qui a pour valeur

$$\frac{Ea\theta}{8R_T} \text{ ampères, ou } \frac{Ea\theta}{80R_T} \text{ u. e. m.}$$

Nous supposerons toujours par la suite E, R, exprimés dans le système pratique.

Le mouvement du cadre fait naître la force électromotrice d'induction :

$$- S\mathcal{H} \frac{dx}{dt} \text{ u. e. m.}$$

d'où le courant induit

$$- \frac{10^{-9} S\mathcal{H}}{2R_T} \frac{dx}{dt} \text{ u. e. m. dans ZW.}$$

Le courant total traversant le cadre est alors

$$i = \frac{Ea\theta}{80R_T} - \frac{10^{-9} S\mathcal{H}}{2R_T} \frac{dx}{dt} \text{ u. e. m.}$$

d'où le couple :

$$S\mathcal{H}i = \frac{S\mathcal{H}Ea\theta}{80R_T} - \frac{10^{-9} S^2\mathcal{H}^2}{2R_T} \frac{dx}{dt} \text{ dynes-cm.}$$

de sorte que, si nous désignons par A le coefficient d'amortissement dû aux frottements sur l'air et le mercure, le mouvement du cadre sera défini par l'équation :

$$K \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} = \frac{S\mathcal{H}Ea\theta}{80R_T} - \frac{10^{-9} S^2\mathcal{H}^2}{2R_T} \frac{dx}{dt}.$$

Posons :

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{A}{K} + \frac{10^{-9} S^2\mathcal{H}^2}{2KR_T} = M \\ \frac{S\mathcal{H}Ea}{80KR_T} = N \end{cases}$$

il vient :

$$(21) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + M \frac{dx}{dt} = N\theta.$$

Ecrivons maintenant l'équation thermique. La résistance du circuit de chauffage est une fonction linéaire de x , soit

$$w + ux \text{ ohms.}$$

Il se dégage par seconde, dans l'étuve, la quantité de chaleur

$$\frac{re^2}{J(w + ux)^2}$$

r étant la résistance chauffante, supposée en métal à coefficient de température nul, et e la f. e. m. de la source qui alimente ce circuit, exprimée en volts. D'où l'équation

$$c \frac{d\theta}{dt} + \rho(T + \theta - \tau) = \frac{re^2}{J(W + ux)^2}$$

qui, en posant :

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{re^2}{cJw^2} = L \\ L + \frac{\rho}{c} (\tau - T) = G \\ \frac{u}{w} = \alpha \\ \frac{c}{\rho} = F \end{cases}$$

devient

$$(23) \quad \frac{d\theta}{dt} + F\theta = G - \frac{L\alpha x(2 + \alpha x)}{(1 + \alpha x)^2}.$$

On remarquera que dans ces équations nous avons supposé que la résistance bolométrique est réellement à la température de l'étuve ($\frac{c'}{\rho} = 0$) ce qui est facilement réalisable en constituant convenablement cette dernière, comme nous l'avons signalé chapitre I, § 6.

21. — ALLURE DES PHÉNOMÈNES. PREMIER CAS : τ EST CONSTANTE

Nous remarquons d'abord que dans l'équation (23), α représente le taux de variation $\frac{u}{w}$ de la partie variable à la partie fixe de la résistance de chauffage. Ce rapport est toujours petit, puisqu'il suffit que les variations de résistance permettent de compenser les variations de la température ambiante ; par suite, il est légitime de remplacer le système des équations (21) et (23) par le système approché

$$(21) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + M \frac{dx}{dt} = N\theta$$

$$(24) \quad \frac{d\theta}{dt} + F\theta = G - 2L\alpha x$$

obtenu en négligeant, dans l'équation thermique, les termes en $\alpha^2, \alpha^3 \dots$ dans le développement du second membre.

L'élimination de x entre ces équations donne

$$(25) \quad \frac{d^3\theta}{dt^3} + (M + F) \frac{d^2\theta}{dt^2} + MF \frac{d\theta}{dt} + 2\alpha LN\theta = 0$$

avec

$$(26) \quad x = \frac{G}{2\alpha L} - \frac{1}{2\alpha L} \left[\frac{d\theta}{dt} + F\theta \right].$$

L'équation (25) a pour caractéristique

$$z^3 + (M + F)z^2 + MFz + 2\alpha LN = 0$$

dont les racines sont les points de rencontre de la droite :

$$y = -2\alpha LN$$

avec la cubique

$$y = z^3 + (M + F)z^2 + MFz$$

Or cette dernière coupe l'axe des z aux points d'abscisse O , $-M$ et $-F$ (fig. 19). Comme α , L , N sont positifs, la

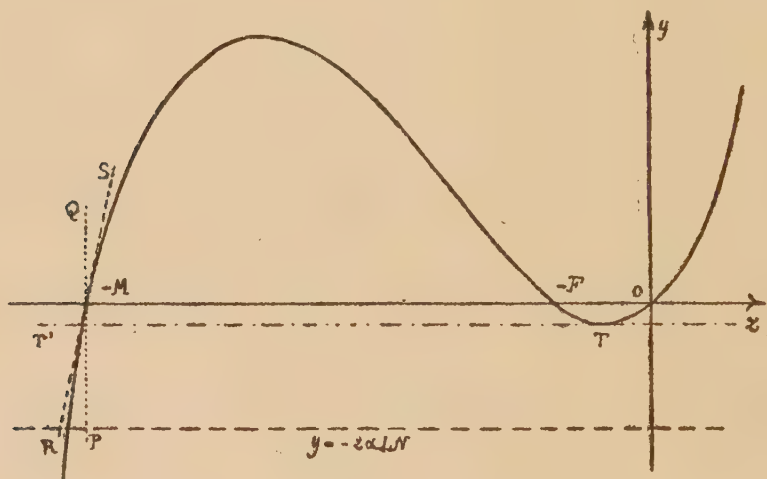


Fig. 19.

droite $y = -2\alpha LN$ passe *au-dessous* de Oz , et en fait, dans tous les cas usuels, la petitesse de F devant M (F vaut quelques millièmes, M est toujours au moins de l'ordre de l'unité), la droite $y = -2\alpha LN$ ne coupe la cubique qu'en un seul point réel.

Il y a donc deux racines imaginaires et une réelle, et par suite oscillation de θ .

Soient ϵ , $\epsilon' + i\omega$, $\epsilon' - i\omega$, ces trois racines.

On calcule aisément une valeur approchée de ϵ à l'aide de la tangente RS (fig. 19), ce qui donne :

$$\epsilon = -M - \frac{2\alpha LN}{M(M-F)}.$$

D'autre part, pour que les oscillations soient réellement amorties, il faut que ϵ' soit aussi négatif ; or l'équation caractéristique donne

$$\epsilon + 2\epsilon' = -M - F$$

d'où la condition pour que ϵ' soit négatif :

$$\frac{2\alpha LN}{M(M-F)} < F$$

soit encore

$$(27) \quad \alpha < \frac{MF(M-F)}{2LN}.$$

C'est la condition nécessaire pour que l'appareil fonctionne comme régulateur.

Autrement, en effet, ϵ' serait positif et l'amplitude des oscillations de θ irait en augmentant indéfiniment ; l'appareil serait un véritable perturbateur.

Il résulte évidemment de cette limitation de α , une limitation de l'intervalle d'emploi. Soient en effet O, X les angles extrêmes de rotation du cadre mobile. Considérés comme des positions d'équilibre, l'un d'eux correspond à la plus petite valeur possible de τ pour laquelle l'appareil régulateur fonctionne encore, et l'autre à la plus grande des valeurs de τ pour laquelle il y encore régulation.

De l'équation (26) nous tirons aisément, pour l'équilibre dans ces positions extrêmes, les valeurs correspondantes de G :

$$G_0 = 0 \quad G_X = 2\alpha LX$$

d'où en remontant à la définition de G :

$$\frac{P}{c} (\tau_1 - T) + L = 0$$

$$\frac{P}{c} (\tau_2 - T) + L = 2\alpha LX$$

l'intervalle d'emploi est donc défini par

$$(28) \quad \begin{cases} \tau_1 = T - \frac{LC}{\rho} \\ \tau_2 = T - \frac{LC}{\rho} + 2 \frac{LC}{\rho} \alpha X \end{cases}$$

la fluctuation maximum possible $\Delta\tau$ de la température ambiante est donc

$$(29) \quad \Delta\tau = 2 \frac{LC}{\rho} \alpha X.$$

L'intervalle d'emploi *maximum* de l'appareil fonctionnant comme régulateur, n'est pas intéressant à *utiliser en pratique* — puisqu'alors on a $\epsilon' = 0$, et les oscillations de θ sont *entretenues*. Mais il est intéressant de l'augmenter le plus possible, ce qui augmentera en même temps les intervalles d'emploi pratiquement utilisables, pour des valeurs négatives de ϵ' . Or la fluctuation maximum tolérable, pour $\epsilon' = 0$, est (d'après (27) et (29))

$$\Delta\tau_{\max} = \frac{M(M - F)}{N}.$$

En nous reportant aux valeurs de M et N , nous voyons que le numérateur contient un terme en $S^4\mathcal{H}^4$, tandis que le dénominateur est proportionnel à $S\mathcal{H}$. Donc :

Toutes choses égales d'ailleurs, une augmentation du champ magnétique $\mathcal{H}$ augmente l'intervalle d'emploi maximum. Une trop grande diminution de $\mathcal{H}$ peut, au contraire, transformer le régulateur en un perturbateur (ϵ' devient positif).

Des calculs sans difficulté donnent les valeurs approchées de ϵ' et ω , de sorte que nous aurons :

$$(30) \quad \begin{cases} \epsilon = -M - \frac{2\alpha LN}{M(M - F)} \\ \epsilon' = \frac{\alpha LN}{M(M - F)} - \frac{F}{2} \\ \omega = \sqrt{MF - 2\epsilon\epsilon' + \epsilon'^2} \end{cases}$$

Ou encore, en posant $\frac{\alpha L N}{M(M-F)} = u$, et en remarquant que dans ω les carrés des petites quantités F , u , ε' sont tout à fait négligeables :

$$(30') \quad \begin{cases} \varepsilon = -M - 2u \\ \varepsilon' = u - \frac{F}{2} \\ \omega = \sqrt{2Mu} \end{cases}$$

(avec les appareils usuels, u est déjà de l'ordre de 10^{-3} pour des champs de 230 ou 300 gauss, et varie sensiblement *en raison inverse du cube du champ*).

Une fois ces racines calculées, θ et x sont de la forme :

$$\begin{cases} \theta = Ae^{\varepsilon' t} + Be^{\varepsilon'' t} \cos \omega t + Ce^{\varepsilon' t} \sin \omega t \\ x = \frac{G}{2\alpha L} [1 + A'e^{\varepsilon' t} + B'e^{\varepsilon'' t} \cos \omega t + C'e^{\varepsilon' t} \sin \omega t] \end{cases}$$

ε est toujours négatif. Quand l'appareil fonctionne comme *régulateur*, ε' est aussi négatif, et l'on voit que pour une valeur constante de τ , x tend vers la valeur limite

$$\xi = \frac{G}{2\alpha L}$$

c'est l'*azimut d'équilibre* dont nous avons parlé au § 19.

22. — INFLUENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE $\mathcal{H}$ SUR LA PRÉCISION DE L'APPAREIL

Supposons que l'on commence à chauffer l'étuve : le régulateur est alors bloqué dans la position $x = 0$ [des butées, non représentées sur la figure 17, empêchent les arcs rr' de sortir du mercure quand $x = 0$ et $x = X$].

Cherchons quel sera, au moment de la mise en route, l'écart maximum θ_m , après le premier instant pour lequel l'on a eu $\theta = 0$.

Prenons pour origine des temps ce premier instant pour lequel $\theta = 0$.

On a alors :

$$x_0 = 0 \quad \theta_0 = 0 \quad \frac{dx_0}{dt} = 0.$$

De l'équation (24) et de sa dérivée, on tire

$$\frac{d\theta_0}{dt} = G \quad \frac{d^2\theta_0}{dt^2} = -FG$$

d'où, en tenant compte de la valeur de u :

$$\theta = \frac{G}{(\varepsilon - \varepsilon')^2 + \omega^2} \left\{ \begin{array}{l} -u[e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon' t} \cos \omega t] + \\ \frac{F^2}{2} - MF - 4Fu + M^2 + 6Mu + 6u^2 \\ + \frac{\quad}{\omega} e^{\varepsilon' t} \sin \omega t. \end{array} \right.$$

Or, nous avons vu que u était très petit ; il en est de même de F et à *fortiori* de ε' qui [système (30')] ne peut dépasser en valeur absolue $\frac{F}{2}$ pour qu'il y ait régulation. Nous concluons de là que le premier terme contenant u en facteur pourra toujours être négligé, et qu'avec une approximation *très supérieure à celle que nécessite la pratique*, nous pouvons écrire, toutes réductions faites, pendant la première demi-oscillation :

$$\theta = \frac{G}{\omega} e^{\varepsilon' t} \sin \omega t.$$

Le premier écart maximum θ_m a donc lieu à l'instant t_1 défini par :

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{\omega}{\varepsilon'}.$$

Il est bien entendu inférieur à $\frac{G}{\omega}$, mais généralement pas de beaucoup, car, ε' étant inférieur en valeur absolue à $\frac{F}{2}$, θ est peu amorti.

Nous utiliserons donc $\frac{G}{\omega}$ comme limite supérieure de l'écart maximum au départ θ_m .

Étudions d'autre part, toutes choses égales d'ailleurs, l'influence du champ $\mathcal{H}$ sur les diverses caractéristiques de l'appareil.

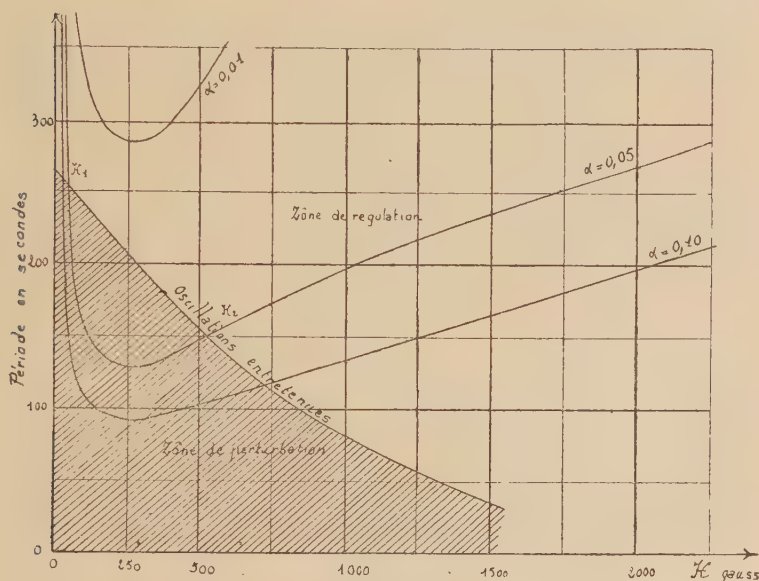


Fig. 20.

a) *Influence du champ $\mathcal{H}$ sur la période des oscillations.*
De (30') et de la valeur de u , on tire aisément

$$\frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{M - F}{2LN\alpha}}.$$

La figure 20 représente, pour un appareil dont nous indiquerons plus loin les constantes, l'allure des courbes $\frac{2\pi}{\omega} = f(\mathcal{H})$ pour diverses valeurs de α ; on voit que chacune d'elles donne un *minimum* pour la période, pour une certaine valeur de $\mathcal{H}$. Un calcul simple montre que la valeur

du champ qui donne cette période minimum, est indépendante de α (rapport de la résistance introduite en circuit par une rotation de 1 radian du système mobile, à la résistance fixe du circuit de chauffage).

b) *Influence du champ $\mathcal{H}$ sur la limitation de α .* — Nous avons déjà vu que, pour que l'appareil soit utilisable *comme régulateur*, il fallait que ϵ' soit négatif, ce qui entraînait une limitation de α , dépendant d'ailleurs du champ $\mathcal{H}$, puis que dans l'inégalité à remplir

$$\alpha < \frac{MF(M - F)}{2LN}$$

le deuxième membre est fonction de $\mathcal{H}$.

Pour chaque valeur de $\mathcal{H}$, l'égalité

$$\alpha = \frac{MF(M - F)}{2LN}$$

définit donc un point d'une certaine courbe, le long de laquelle les oscillations de l'appareil sont entretenues, et qui sépare les valeurs de α selon qu'elles permettent, ou non, la régulation (fig. 21).

Il est intéressant de remarquer que la tangente AB à cette courbe n'est pas confondue avec l'axe des champs, et que si, par conséquent, l'on utilise une valeur de α inférieure à l'ordonnée de cette tangente (0,012 pour la figure 21), il y aura régulation *véritable quel que soit le champ $\mathcal{H}$* .

Au contraire pour une valeur de α supérieure à l'ordonnée de AB, il y a deux valeurs critiques $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ entre lesquelles le champ ne doit pas être compris si l'on veut qu'il y ait régulation.

Pratiquement, $\mathcal{H}_1$ étant trop petit pour que l'appareil fonctionne dans des conditions intéressantes, il faudra prendre $\mathcal{H} > \mathcal{H}_2$.

Ces valeurs de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ on été portées sur les courbes de la figure 20, ce qui permet d'y séparer également les zones de régulation et de perturbation.

c) *Limite supérieure* $\frac{G}{\omega}$ de l'écart θ_m . — Il est naturel, pour comparer le fonctionnement de l'appareil pour diverses valeurs de $\mathcal{H}$, de supposer que, pour la température ambiante moyenne τ , il reste à l'appareil une marge égale

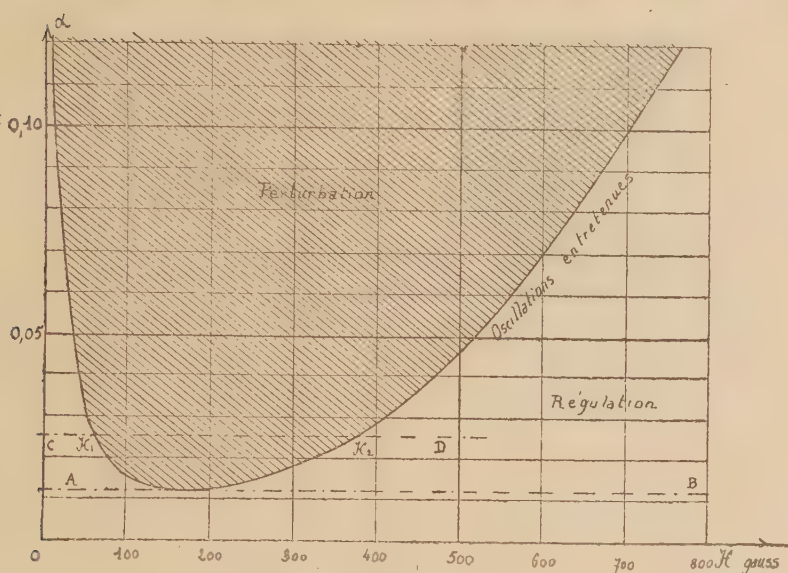


Fig. 21.

pour corriger les variations de τ , soit en plus, soit en moins de la valeur moyenne. Cela a lieu sensiblement quand la position limite d'équilibre du régulateur est en $\frac{X}{2}$, au milieu de la course totale.

Soit ξ l'angle qui correspond à l'équilibre ; nous avons vu au § 21 que

$$\xi = \frac{G}{2\alpha L}$$

d'où pour $\xi = \frac{X}{2}$,

$$G = \alpha LX.$$

D'où enfin les courbes de la figure 22, correspondant toujours aux mêmes appareils. Pour les valeurs utilisables de $\mathcal{H}$, les écarts θ_m croissent avec $\mathcal{H}$: il n'y a donc pas intérêt à l'augmenter au delà de la valeur nécessaire pour obtenir une sensibilité statique suffisante.

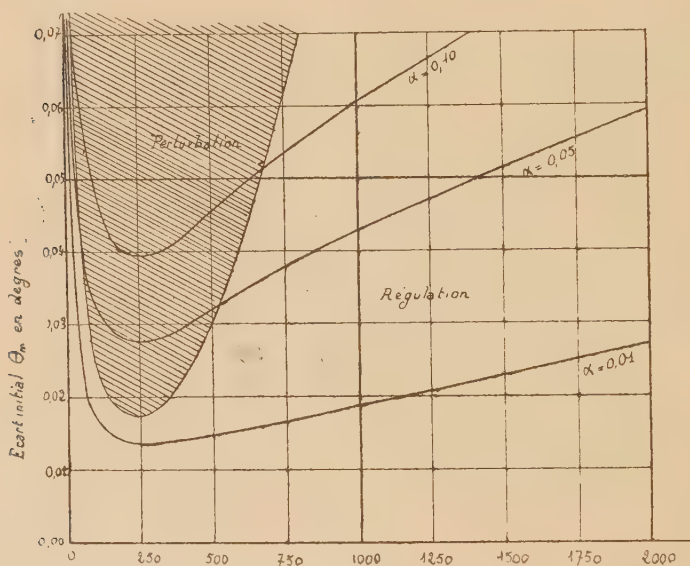


Fig. 22.

d) *Sensibilité statique.* — Dans tout ce qui précède, nous supposons que, quelque petit que soit le couple agissant, il provoque le déplacement du cadre K.

Or, à cause des frottements des couteaux sur leurs supports, le cadre ne tourne en réalité que si le couple qui agit sur lui dépasse un certain couple minimum Γ . D'autre part (§ 20), le couple qui, pour un écart θ , tend à faire tourner le cadre est

$$KN\theta$$

La sensibilité statique sera donc définie par le plus petit

écart θ_s qui soit capable de provoquer réellement le départ du mouvement :

$$\theta_s = \frac{\Gamma}{KN}.$$

Cet écart ne dépend donc pas de X , mais varie en *sens inverse* de $\mathcal{H}$ (fig. 23).

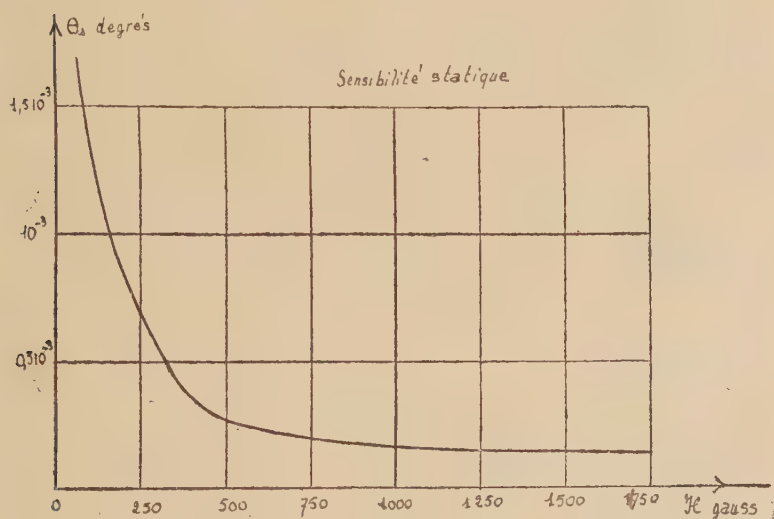


Fig. 23.

Quant à l'intervalle d'emploi, nous avons vu (§ 21), qu'il a pour valeur $\frac{2LC\alpha X}{\rho}$ ou encore $\frac{2\alpha LX}{F}$. Il est donc *indépendant* de $\mathcal{H}$, et dépend linéairement de α .

En résumé, pour déterminer la valeur optimum du champ $\mathcal{H}$, nous serons guidés par les considérations suivantes :

- 1° $\mathcal{H}$ doit être *supérieur* à $\mathcal{H}_2$ pour qu'il y ait régulation.
- 2° $\mathcal{H}$ doit encore être *assez grand* pour que la *sensibilité statique* soit *suffisante* ;

3° Il y a intérêt à choisir la plus petite valeur de $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions précédentes, puisque la période $\frac{2\pi}{\omega}$ et le premier écart θ_m croissent avec $\mathcal{H}$

23. — INFLUENCE DES AUTRES FACTEURS

Pour modifier les propriétés de l'appareil, nous ne disposons pas que de $\mathcal{H}$: nous pouvons encore agir sur α , L , E , a , et R_T .

Considérons d'abord l'écart θ_s qui définit la sensibilité statique. En se reportant à l'expression de N , on a ;

$$\theta_s = \frac{80R_T\Gamma}{S\mathcal{H}Ea}.$$

Soit P la puissance dépensée dans la résistance thermométrique R_T ; celle qui est dépensée dans les 4 bras du pont est :

$$4P = \frac{E^2}{R_T}$$

d'où :

$$\theta_s = \frac{20E\Gamma}{S\mathcal{H}Pa}.$$

Il y donc intérêt, pour diminuer θ_s , à *augmenter la puissance dépensée dans le pont*.

Remarquons toutefois que, si cette puissance est importante, on ne peut plus considérer la température de la résistance thermométrique comme égale à celle de l'étuve (voir Note III).

Le couple Γ dépend de la perfection avec laquelle sont réalisés les couteaux ; dans l'appareil auquel se rapportent toutes les figures précédentes, il est d'environ 1 dyne-cm., et il semble difficile d'obtenir beaucoup mieux (voir § 32, chapitre III).

a est déterminé par le métal qui constitue la résistance thermométrique. Le dispositif de la figure 24, où l'on utilise deux bras de pont comme résistances thermométriques, permet de diviser encore θ_s par 2, pour une même puissance dépensée dans l'unité de longueur du fil résistant. Les

figures 20, 21, 22, 23 sont relatives à un appareil monté de cette manière, et nous supposerons désormais que l'on adopte toujours cette disposition.

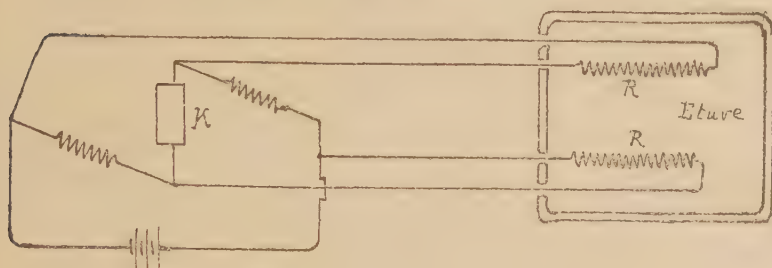


Fig. 24.

La latitude de variation de la température extérieure

$$\Delta\tau = \frac{2\alpha LX}{F} = \frac{2\alpha Xre^2}{\rho JW^2}$$

augmente quand ρ diminue : il y a donc intérêt à *calorifier* l'étuve. D'autre part, $\Delta\tau$ est indépendant de la masse en eau c de cette étuve : il y a donc avantage à disposer de c , de manière à obtenir par ailleurs la valeur de $F = \frac{\rho}{c}$ la plus avantageuse. *En particulier il pourra être avantageux de lester l'étuve en y enfermant un réservoir d'eau.*

REMARQUE. — Dans tout ce qui précède, nous supposons, ce qui est rarement réalisable, que la variation de résistance de rr' suffit au réglage de la température. Ce n'est possible évidemment que pour une étuve de petites dimensions, chauffée à basse tension. En pratique, il est difficile d'absorber dans rr' une puissance supérieure à 60 ou 80 watts pour l'angle total X . Il est donc généralement indiqué d'utiliser *deux circuits de chauffage* ; le premier, sans régulateur, amène simplement la température de l'étuve au *voisinage* de T ; il peut d'ailleurs être soumis à diverses variations (influence des variations de la tension d'un secteur de ville... etc.).

Le second, où une puissance beaucoup plus faible est mise en jeu, ne fait que l'appoint et comporte le régulateur.

Dans ces conditions, on vérifie aisément :

1° Que l'équation (21) qui définit les mouvements du système mobile, n'est pas modifiée.

2° Que l'équation (24) devient

$$\frac{d\theta}{dt} + F\theta = G' - \frac{L'ax(2 + ax)}{(1 + ax)^2}$$

où $L'c$ désigne la quantité de chaleur que cède par seconde à l'étuve la résistance du 2° circuit, et où l'on a posé

$$G' = \frac{c}{c}(\tau - T) + L' + \frac{q}{c}.$$

Par suite, les équations du § 21 et toutes les conclusions que nous en avons tirées ne sont pas modifiées, si l'on y remplace L et G par L' et G' .

Il en résulte que le même régulateur permet, par simple variation de la température d'équilibrage du pont, et par addition d'un circuit fixe de chauffage, de réaliser dans une même étuve, avec la même précision, n'importe quelle température donnée.

Dans tous les cas, la latitude de variation de τ :

$$\Delta\tau = \frac{2\alpha LX}{F}$$

reste la même si l'on conserve L , c'est-à-dire si l'on ne modifie que les constantes du circuit auxiliaire. Nous verrons au chapitre III d'importantes applications de ces propriétés.

24. — INFLUENCE DES VARIATIONS DE LA TEMPÉRATURE AMBIANTE

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes efforcés de donner une idée correcte du fonctionnement de

l'appareil dans le cas où τ est constant. Nous verrons au § 25 que, malgré la complexité relative des phénomènes précédents, la technique d'emploi de ces appareils n'est guère plus compliquée que celle des appareils discontinus étudiés au chapitre I.

Toutefois, l'examen de la valeur de $\Delta\tau$ montre que l'appareil présente un intervalle d'emploi assez petit lorsque l'on en exige une très grande précision (lorsque l'on veut que θ_m soit de l'ordre de θ , par exemple). Il en résulte que cet appareil est surtout intéressant pour réaliser des températures variables selon une loi donnée (voir chapitre III), ou pour maintenir une température constante *avec une très haute précision*, en utilisant un montage en cascade déjà décrit dans la 1^{re} partie.

Si nous envisageons cette application, nous utiliserons naturellement dans la 1^{re} enceinte un thermostat discontinu aussi simple que possible. *Tout se passera alors comme si l'étuve réglée par le thermostat continu électromagnétique était placée dans un milieu dont la température (qui joue ici le rôle de τ) varie périodiquement.*

L'allure des courbes de la figure 6 montre que τ peut alors être représenté par une série de la forme :

$$\tau = \sum_0^{\infty} A_n \sin n\beta t + \tau_0$$

d'où nous tirons :

$$G = \frac{\rho}{c} \left[\sum_0^{\infty} A_n \sin n\beta t + \tau_0 - T \right] + L$$

l'équation du 3^e ordre qui définit θ se modifie alors et devient

$$(33) \quad \frac{d^3\theta}{dt^3} + (M + F) \frac{d^2\theta}{dt^2} + MF \frac{d\theta}{dt} + 2\alpha LN\theta = (M + F) \frac{dG}{dt} + \frac{d^2C}{dt^2}$$

et nous voyons qu'au bout d'un temps suffisant, θ tend vers le régime périodique

$$\theta = F \sum_0^{\infty} \frac{A_n - n\beta}{p^2 + p^2} [(p[M + F] - nq\beta) \sin n\beta t + (q[M + F] + np\beta) \cos \beta t]$$

où l'on a posé

$$p = n\beta [MF - n^2\beta^2]$$

$$q = 2\alpha LN - n^2\beta^2(M + F).$$

Le rapport entre les amplitudes des harmoniques de même rang n de θ et de τ est

$$Fn\beta \sqrt{\frac{(M + F)^2 + n^2\beta^2}{p^2 + q^2}}.$$

Or la période $\frac{2\pi}{\beta}$ étant de l'ordre de grandeur de la seconde, tandis que α et F sont petits, on a très sensiblement pour le rapport précédent la valeur :

$$\frac{F}{n\beta}.$$

D'où nous concluons que :

1^o Les harmoniques sont étouffées d'autant plus que leur rang est plus élevé ;

2^o Même pour le terme fondamental, l'amplitude est considérablement diminuée, le rapport $\frac{F}{\beta}$ étant au plus de l'ordre de 10^{-3} .

Ainsi, pour le thermostat discontinu du § 6 et le thermostat électromagnétique des paragraphes précédents, l'on aurait

$$\frac{2\pi}{\beta} = 1^s21 \quad \text{d'où} \quad \beta = 5,19$$

d'autre part $F' = 4 \cdot 10^{-3}$ (pour l'enceinte extérieure) et $F = 10^{-3}$ pour l'étuve réglée continuellement. D'où :

$$\frac{F}{\beta} < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Or, l'amplitude des oscillations de la 1^{re} enceinte (§ 6,

chapitre I), étant de l'ordre de $0^{\circ}15$, *celle des variations de θ dans la 2^e enceinte sera inférieure à $3 \cdot 10^{-5}$ degré.*

Cela exigerait, bien entendu, que la sensibilité statique soit notablement plus petite que cette valeur ; en nous reportant à la figure 23, nous voyons que, pour l'appareil considéré, il serait possible d'obtenir $\theta_s = 10^{-4}$ degré à condition de faire $\mathcal{H} = 1800$ gauss, ce qui exige l'emploi d'un électro-aimant pour la production de $\mathcal{H}$.

Toutefois, les phénomènes de propagation diminueront cette précision théorique (voir Note IV). Mais nous pouvons retenir des résultats précédents la conclusion générale suivante : *il est possible, par le dispositif indiqué, de réaliser la constance de la température d'une étuve avec une précision qui dépasse de beaucoup les besoins de la pratique, et qui n'est guère limitée que par la non-uniformité de la température dans l'étuve.*

REMARQUE IMPORTANTE. — Le rapport $\frac{F}{\beta}$ que l'on pourrait appeler le « coefficient d'étouffement » du terme fondamental, ne dépend pas des caractéristiques du régulateur électromagnétique.

Effectivement, si l'on supprime ce dernier, l'on vérifie aisément par le calcul que la température de l'étuve varie périodiquement et que le rapport des amplitudes de θ et de τ est encore $\frac{F}{\beta}$. Il semble donc au premier abord que, non seulement il n'y ait pas intérêt à régler alors la température de la 2^e enceinte au moyen du thermostat continu, mais encore qu'au prix d'un dispositif compliqué on allonge le temps de mise en route, puisqu'il faut attendre que l'écart moyen

$$\frac{G_m}{\omega} e^{s't} \sin \omega t$$

soit devenu négligeable, ce qui n'a lieu qu'au bout d'un temps assez long, la période $\frac{2\pi}{\omega}$ étant (fig. 20) de l'ordre de *plusieurs minutes*.

Mais, en réalité, si l'on n'emploie pas le thermostat continu dans la 2^e étuve, on maintient dans cette dernière une température qui oscille il est vrai très peu, mais autour d'une valeur moyenne complètement inconnue et non réglable avec précision.

L'intérêt de ces dispositifs n'est donc pas tant de maintenir une température constante, que de maintenir, malgré toutes les variations extérieures, une température constante donnée.

25. — TECHNIQUE D'EMPLOI DES THERMOSTATS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

1^{er} CAS. *L'appareil est employé seul.* — Les données du problème sont

1^o La valeur de $F = \frac{p}{c}$ déduite de la courbe de refroidissement ;

2^o La valeur de L (ou de L') qui dépend de la puissance maximum absorbable dans rr' ;

3^o Les constantes mécaniques (A, K, Γ) et électriques (R, S) du thermostat.

Il s'agit de disposer des paramètres $\mathcal{H}, \alpha, E$ de manière à réaliser les conditions suivantes :

a) Obtenir un écart maximum θ_m inférieur à une valeur donnée.

b) Rendre θ_s nettement plus petit que θ_m .

Le fait d'obtenir une température déterminée T n'intervient que sur le réglage du pont, qui peut être fait sans s'inquiéter des autres variables.

Comme nous disposons de trois paramètres $\mathcal{H}, \alpha, E$ pour réaliser deux conditions a) et b), il y a indétermination.

Nous avons vu d'autre part que $\mathcal{H}$ doit être supérieur à la valeur critique $\mathcal{H}_2$, et que θ_m est d'autant plus petit que l'on donne à $\mathcal{H}$ une valeur plus voisine de $\mathcal{H}_2$ (fig. 22). Il y a donc intérêt à *déterminer d'abord un réglage*

critique, correspondant à une valeur de $\mathcal{H}$ égale à $\mathcal{H}_2$ de manière à obtenir une sensibilité statique suffisante et une valeur de θ_m inférieure à l'écart maximum tolérable de 20 ou 30 % par exemple.

Or, pour la valeur critique de $\mathcal{H}$, on a $\varepsilon' = 0$, d'où avec les notations du § 21 :

$$(a) \quad F = 2u = \frac{2LN\alpha}{M(M-F)} \quad \text{ou environ} \quad \frac{2LN\alpha}{M^2}.$$

D'autre part, et toujours avec la convention $\xi = \frac{X}{2}$, nous avons :

$$(b) \quad \theta_m = \frac{\alpha LX}{\sqrt{2Mu}} \quad \theta_s = \frac{\Gamma}{KN} \quad (c)$$

Si nous exprimons que θ_s est m fois plus petit que θ_m , nous aurons très sensiblement :

$$(34) \quad M^{\frac{3}{2}} = \frac{2m\Gamma}{KX\sqrt{F}}.$$

Relation qui déterminera le champ critique $\mathcal{H}_2$ en fonction de m et de F , et que l'on peut traduire, pour un appareil donné par un abaque tel que l'abaque III, qui correspond aux appareils auxquels se rapportent les courbes 20, 21, 22 et 23.

Une fois $\mathcal{H}_2$ déterminé, nous tirons de (b) et (c) :

$$E = \frac{4\alpha m R \Gamma}{S \mathcal{H} \alpha \theta_m}.$$

Enfin l'élimination de M et N entre (a), (b), (c) et (34) donne :

$$\alpha L = \theta_m \sqrt[3]{\frac{2Fm\Gamma}{KX^4}}.$$

D'où nous tirons α . Il est évident que, pour l'emploi rapide d'un même appareil, il serait avantageux de traduire également ces deux dernières relations par des abaques.

Les équations précédentes déterminent donc des valeurs

de $\mathcal{H}$, E et α correspondant à un régime critique situé sur la courbe d'oscillations entretenues qui sépare les zones de régulation et de perturbation. Il suffira alors d'augmenter légèrement $\mathcal{H}$ pour tomber dans la zone de régulation.

Comme la mesure de $\mathcal{H}$ serait une opération peu pratique, l'on met l'appareil en route avec les valeurs trouvées pour α et E , et l'on règle l'excitation de l'électroaimant qui produit le champ $\mathcal{H}$ de manière à amorcer les oscillations ; il suffira alors d'augmenter très légèrement cette excitation pour se trouver dans la zone de régulation.

2° CAS. *L'appareil est employé en cascade avec un thermostat discontinu.* — Dans ce cas l'écart maximum θ_m au moment de la mise en route ne nous intéresse plus, puisque nous attendons l'établissement d'un régime d'équilibre. Ce qui importe ici, c'est :

1° De réduire θ , en augmentant beaucoup le champ $\mathcal{H}$;

2° D'obtenir un intervalle d'emploi juste suffisant pour permettre de compenser les variations de température périodiques dues au thermostat discontinu placé dans la première enceinte

La latitude de fluctuation

$$\Delta\tau = \frac{2\alpha LX}{F}$$

ne dépendant pas du champ $\mathcal{H}$, peut être réglée indépendamment de celui-ci, et l'ordre des réglages est ici indifférent ; ce cas se présente donc comme beaucoup plus simple que le précédent.

26. — EXPÉRIENCES EFFECTUÉES SUR LE THERMOSTAT PRÉCÉDENT

RÉSULTATS

Nous avons construit deux types d'appareils fondés sur le principe précédent, l'un avec un faisceau d'aimants, l'autre avec un électroaimant pour la production du champ $\mathcal{H}$, et

nous avons abandonné rapidement le premier : les calculs qui précèdent montrent en effet qu'il est à peu près nécessaire, pour régler correctement l'appareil, de pouvoir faire varier $\mathcal{R}$. Voici les principales caractéristiques du 2^e appareil, auquel se rapportent toutes les courbes que nous avons données.

Cadre mobile. — Dimensions moyennes 7×7 centimètres ; 200 tours de fil $\frac{6}{10}$ répartis en 8 couches de 25 spires ; résistance $3,98 \Omega$; moment d'inertie $2\,450$ C. G. S.

Pont. — Bras égaux ayant sensiblement pour résistance commune 4 ohms ; les 3 bras invariables sont en constant et le bras variable en nickel.

On a soigneusement éliminé toute force électromotrice thermoélectrique parasite, en immergeant les 3 points Z, W et Y de la figure 18 dans une même petite cuve remplie d'huile isolante brassée mécaniquement. Un petit disque en cuivre mince, fixé à chaque soudure, joue le rôle d'ailette.

L'étuve employée était une sorte de calorimètre plein d'eau et bien isolé, de masse en eau de l'ordre de 2000 grammes, et l'on avait $F = 10^{-3}$ à quelques $\frac{0}{10}$ près. D'autre part $L = 0,023$; le chauffage est assuré par une batterie d'accumulateurs. Le pont est alimenté sous $E = 16$ volts ; il se dépense donc environ 16 watts dans chaque résistance thermométrique.

Les précautions prises dans l'élimination des f. e. m. thermoélectriques n'ont rien d'exagéré, car, si on ne les prend pas, il est tout à fait impossible d'obtenir des résultats concordants d'une expérience à l'autre, et nous avons cherché pendant quelque temps la cause de ces irrégularités.

Ces précautions une fois prises, il est facile, avec l'appareil précédent, de maintenir dans le calorimètre qui nous servait d'étuve, une température inférieure à 100° avec des variations inférieures à 10^{-2} degré en marche normale ; l'écart initial θ_m calculé au moment de la mise en route est environ $2,5 \cdot 10^{-2}$ degré. La figure 25 représente la courbe

de mise en route *calculée* (en trait plein) et les points relevés expérimentalement. Cette vérification expérimentale a été pratiquée de la manière suivante :

1° Une 2^e résistance thermométrique, placée dans l'un des bras d'un pont de Wheaststone muni d'un galvanomètre sensible permet de déterminer, en un point quelconque de l'étuve, les écarts θ' entre la température en ce point à un instant t et la température moyenne en ce même point ;

2° Un système de 2 petits couples thermoélectrique montés en opposition, et dont l'une des soudures est très voisine de la résistance thermométrique *de mesure*, et l'autre très voisine de la résistance thermométrique *de réglage*, permet d'évaluer la différence entre les températures *moyennes* au voisinage de ces deux résistances. Nous avons effectué les mesures suivantes :

1° *Résistances thermométriques très voisines.* — Distance des deux résistances de mesure et de réglage $d = 1$ millimètre environ, le couple thermoélectrique n'est pas utilisé. on admet $T' = T$.

Temps en secondes	0	5	10	15	20	25
Déviation galvanomètre.	235,0	253,4	250,0	243,5	239,0	235,1
Temps en secondes	30	35	40	45	50	
Déviation galvanomètre.	235,0	235,0	234,5	234,8	235,0	

au delà de $t = 50$ secondes, l'on n'observe plus que des oscillations inférieures à une division au voisinage de la valeur moyenne 235, et un très lent accroissement dû au déplacement du zéro du galvanomètre. On étalonne ce dernier en laissant refroidir l'étuve et en utilisant la courbe de refroidissement ; on trouve que 0,1 degré correspondent

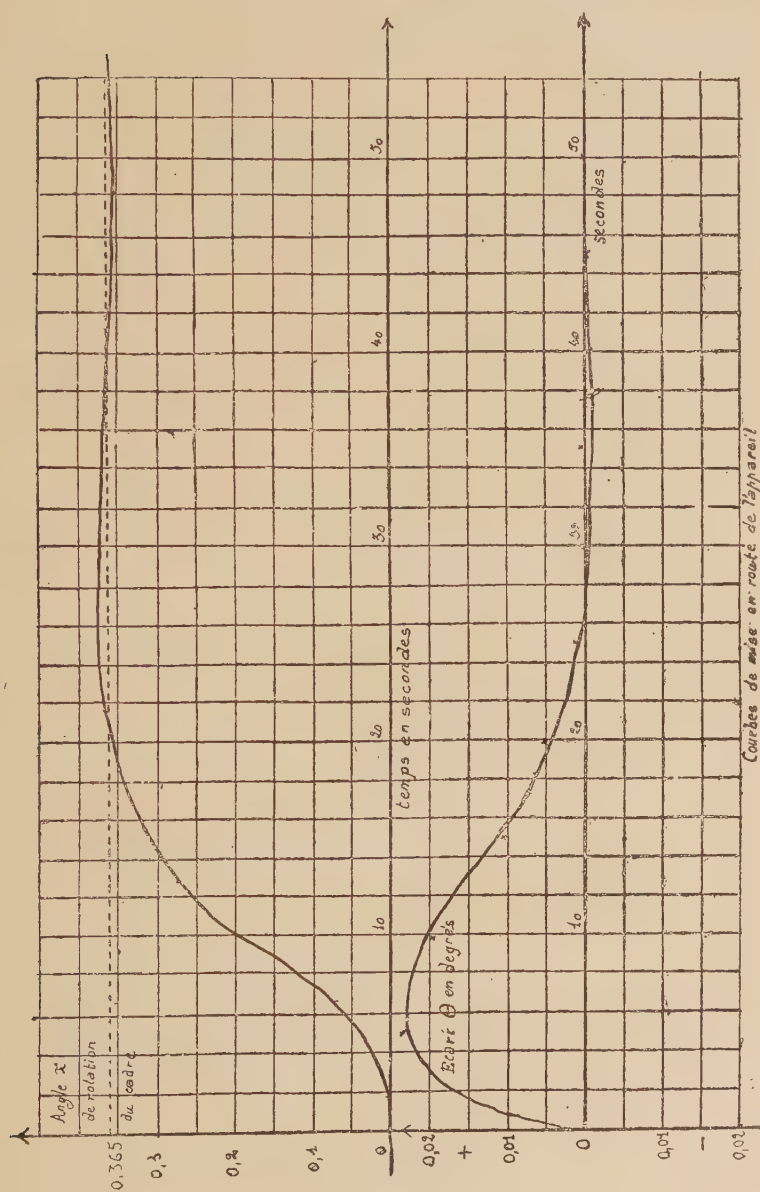


Fig. 25.

sensiblement à 80 divisions de l'échelle du galvanomètre. D'où l'on déduit les points marqués sur la figure 25, qui correspondent d'une façon très satisfaisante avec la courbe théorique.

2° Distance des résistances $d = 85$ millimètres.

Temps t	0	5	10	15	20	25	30
Déviatiôn α	227,0	251,0	293,5	270,0	262,0	256,0	255,0
Temps t	35	40	45	50	60	65	
Déviatiôn α	251,5	254,0	252,5	251,0	252,0	251,5	

D'autre part, les couples fer-constantan utilisés décèlent entre les deux points où se font la mesure et le réglage, une différence moyenne de température de $2,6 \cdot 10^{-2}$ degré. L'examen des valeurs contenues dans le tableau précédent montre deux faits :

1° A la distance considérée de la résistance de réglage, et pour une agitation déterminée du milieu, les écarts de température sont plus considérables (environ deux fois) qu'au voisinage immédiat de cette résistance :

2° Les oscillations de température au point considéré sont déphasées par rapport aux oscillations au voisinage de la résistance de réglage.

Nous pouvons conclure de là que les phénomènes de propagation, ainsi que nous l'avons énoncé au § 24, limitent la précision de la régulation, et que la précision du régulateur dépasse celle avec laquelle il est possible de réaliser l'uniformité de température.

Toutefois, si nous utilisons une portion restreinte d'une étuve suffisamment grande, portion située au voisinage immédiat de la résistance de réglage, nous voyons d'après le

premier tableau de valeurs numériques, qu'environ 1 minute après la mise en route, les perturbations de θ sont inférieures à celle qui correspondrait à 1 division du galvanomètre, soit à $\frac{1}{800}$ de degré.

Nous pouvons donc considérer comme réalisable, le maintien, dans un volume suffisamment petit, d'une température constante à 1 millième de degré près.

CHAPITRE III

OBTENTION DE VARIATIONS SINUSOÏDALES DE TEMPÉRATURE SIMPLIFICATION DE LA MÉTHODE D'ÅNGSTRÖM OBTENTION DE TEMPÉRATURES FONCTION QUELCONQUE DU TEMPS APPAREILS DIVERS. DÉTAILS DE CONSTRUCTION ET DE RÉGLAGE DES APPAREILS CONTINUS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

27. — FONCTIONNEMENT D'UN THERMOSTAT CONTINU ÉLECTRO-
MAGNÉTIQUE, POUR DES VALEURS DE $\mathcal{H}$ TRÈS VOISINES DU
CHAMP CRITIQUE $\mathcal{H}_c$. APPLICATION A LA MESURE DES CON-
DUCTIBILITÉS PAR LA MÉTHODE D'ÅNGSTRÖM.

Nous avons vu que si l'on règle l'excitation de manière
que :

$$(36) \quad F = 2u = \frac{2LN\alpha}{M(M-F)} = \text{environ} \quad \frac{2LN\alpha}{M^2}$$

l'on a $\varepsilon' = 0$, et que par suite l'appareil entretient des varia-
tions sinusoïdales de température

$$\theta = \frac{G}{\omega} \sin \omega t.$$

En supposant toujours que la position moyenne du cadre,
définie par l'angle ξ , est voisine de $\frac{X}{2}$, on a $G = \alpha LX$, et en

tenant compte de la condition $F = 2u$ avec $\omega = \sqrt{2Ma}$, et de l'équation (36), on a :

$$(37) \quad \theta = \frac{X\sqrt{FM^{\frac{3}{2}}}}{N} \sin \omega t.$$

Sous cette borne, l'on voit que l'amplitude des oscillations, quand le champ est égal au champ critique, ne dépend, pour un même appareil et une même étuve, que de la valeur de ce champ critique.

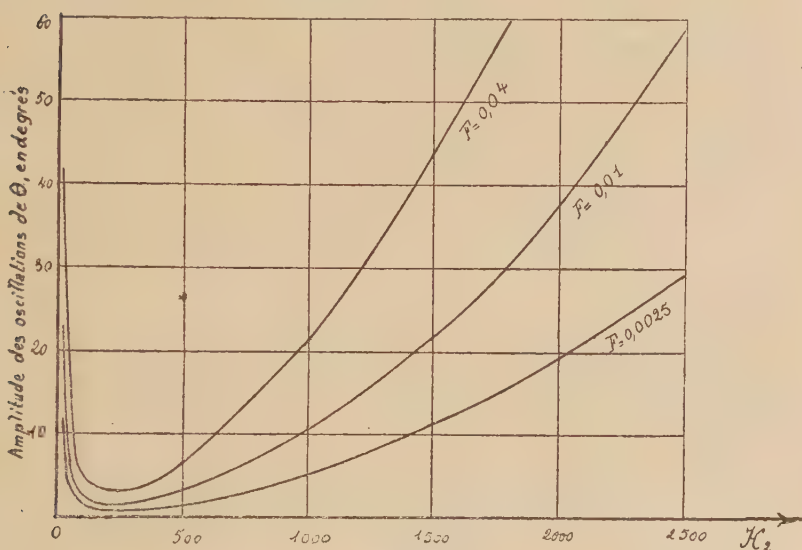


Fig. 26.

La figure 26 représente, en fonction du champ critique H_c , pour quelques valeurs de F et le même appareil que celui du chapitre II, l'oscillation totale

$$A = \frac{2X\sqrt{FM^{\frac{3}{2}}}}{N} \quad (1).$$

(1) Les seules modifications apportées ont pour but d'augmenter l'amplitude ; on a réduit la f. e. m. E à 2 volts, et utilisé une seule résistance thermométrique égale à $4 \, \Omega$; comparer avec les dispositions décrites au chapitre II, où l'on cherche à obtenir le résultat inverse.

Pour faire varier $\mathcal{H}_2$, il suffit évidemment de faire varier la racine $\mathcal{H}$ de l'équation

$$F = \frac{2LN\alpha}{M(M-F)}$$

en faisant varier le produit αL (figure 27).

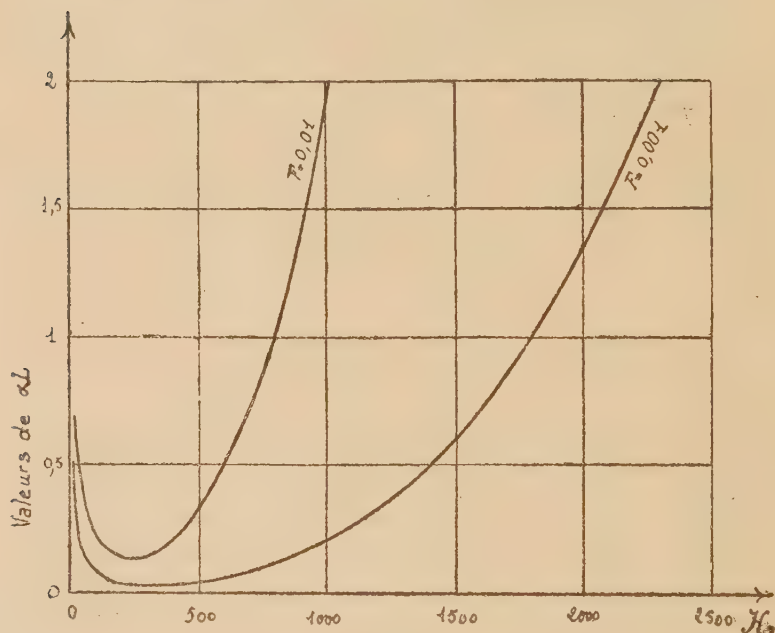


Fig. 27.

L'on peut donc, par un réglage convenable de α (c'est-à-dire de la résistance chauffante dont dépend α) et de e , c dont dépend L , obtenir une oscillation sinusoïdale d'amplitude déterminée à volonté, et permettant l'application directe de la méthode d'Ångström.

Du fait même que l'on n'utilise qu'un seul sinus, tout calcul de représentation de température par une série de Fourier est supprimé, et la méthode devient remarquablement simple.

La barre à essayer est fixée dans la paroi de l'étuve comme il a déjà été indiqué au chapitre I (figure 3).

Il suffit de mesurer :

1° La période $\frac{2\pi}{\omega}$: c'est la même que celle des oscillations du cadre mobile du régulateur, elle est donc extrêmement facile à mesurer, à l'aide du temps que suit le cadre pour effectuer un certain nombre d'oscillations ;

2° On mesure le décalage μl entre les oscillations à l'origine et les oscillations de température à la distance l sur le barreau, à l'aide d'un petit couple thermoélectrique placé à la distance l ;

3° Le même couple thermoélectrique permet de déterminer m dans l'exponentielle d'amortissement e^{-ml} ; on a alors

$$\frac{k}{c'\rho} = \frac{\omega}{2m\mu} \quad \text{d'où} \quad k = \frac{c'\rho\omega}{2m\mu}$$

dans ces formules, ρ est la densité et c' la chaleur spécifique de la substance considérée.

Appliquée de cette manière, la méthode d'Ångström devient presque ainsi simple que la méthode d'Ingenhousz ; elle reste beaucoup plus précise, les résultats ne dépendant pas de la conductibilité extérieure.

Il n'est nullement nécessaire de réaliser *exactement* la condition $F = 2u$ qui détermine le champ critique ; au voisinage de cette valeur, l'amortissement ou l'amplification des oscillations sont très faibles, et on peut considérer l'amplitude comme constante pendant un temps de beaucoup supérieur à la durée des expériences.

Les figures 25 et 27 montrent que, si l'on veut utiliser des amplitudes de quelques dizaines de degrés, l'on est conduit pour αL à des valeurs relativement considérables ; comme les calculs supposent que α est petit, *c'est L qu'il faudra augmenter*, principalement en diminuant la capacité calorifique c de l'étuve.

Nous avons employé avec avantage, pour réaliser ces

conditions, un petit calorimètre en laiton poli et argenté, contenant seulement 40 cm³ d'eau environ, et placé dans un plus grand également argenté, échancré pour laisser passer la barre. Pour éviter l'évaporation, le petit calorimètre était complètement clos.

La mesure d'une conductibilité thermique, par ces procédés, est une opération presque automatique : on laisse l'appareil fonctionner seul pendant une heure environ, de manière à être certain que le régime limite soit atteint. Il suffit alors de mesurer la période, de déterminer le déphasage μl et le coefficient m , ce qui nécessite seulement deux mesures de temps et une de température, pour avoir k en fonction de c' et ρ .

28. — REMARQUES GÉNÉRALES SUR LE PROBLÈME QUI CONSISTE
A RÉALISER, DANS UNE ÉTUVE, UNE TEMPÉRATURE
FONCTION DONNÉE DU TEMPS. APPAREILS DISCONTINUS

La réalisation d'une température fonction donnée du temps, est un problème qui, outre un intérêt industriel évident ⁽¹⁾ (traitement thermique des aciers, par exemple) peut présenter un intérêt physique considérable notamment, dans l'étude des points de transformation et dans celle des propriétés des solides qui dépendent de la température par l'intermédiaire d'une fonction non uniforme ou à hystérésis.

Ce problème est actuellement très peu étudié ; nous en avons obtenu une solution simple, fournissant une variation *continue* selon une loi quelconque dont le développement soit possible en série de Fourier, en utilisant comme organe principal le régulateur continu électromagnétique étudié plus haut. Nous développerons cette méthode au paragraphe suivant.

⁽¹⁾ Citons aussi certaines mesures industrielles de conductibilité, cf. par exemple un article de M. BÉNARD, *Revue Générale du Froid*, Mars, Avril et Mai 1921.

Indépendamment, M. VERNEY étudiait, au Conservatoire des Arts et Métiers, la réalisation, à l'aide d'un appareil discontinu, d'une température quelconque donnée par sa représentation graphique (réf. 42). Le dispositif de M. Verney utilise comme appareil de réglage le thermostat dont nous avons déjà parlé (§ 5, § 9); la variation de température est obtenue

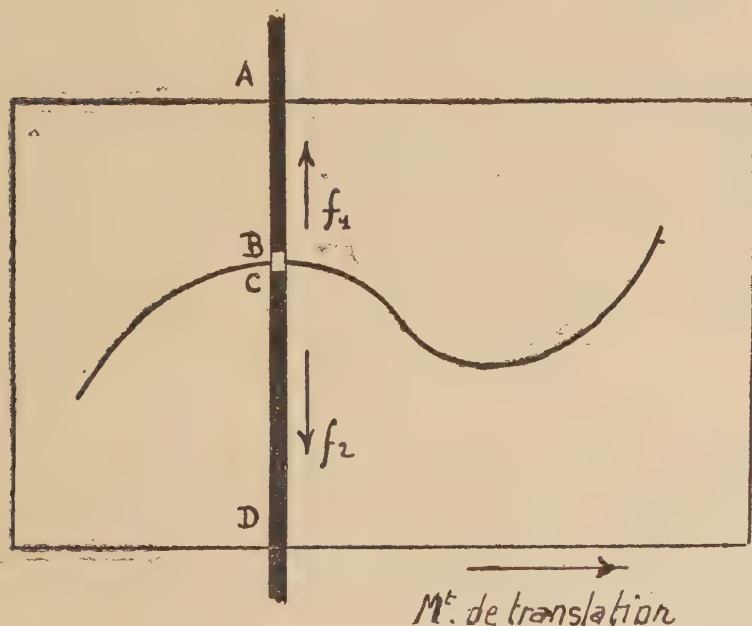


Fig. 28.

en modifiant le couple de torsion du galvanomètre à contacts placé dans le circuit du couple thermoélectrique qui joue le rôle de thermomètre. Ce résultat est obtenu en réalisant matériellement par une bande de cuivre rouge, et à une échelle convenable, la courbe de température à reproduire (figure 28). Une tige conductrice ABCD portant une partie isolante BC est maintenue automatiquement, pendant le mouvement de translation de la courbe, dans une position telle que BC touche cette courbe (le circuit d'un petit

moteur est fermé dès que la partie métallique de la tige touche la courbe, le montage étant effectué de telle façon que la tige soit entraînée dans le sens f_1 quand AB vient en contact avec la courbe, et dans le sens f_2 quand CD vient en contact). Cette tige mobile commande la tête de torsion du galvanomètre.

Il est clair que ce mode de réglage présente deux espèces de discontinuités : à l'oscillation naturelle d'un thermostat discontinu, se trouvent superposées les discontinuités provenant de la décomposition d'une courbe continue en un escalier à marches plus ou moins rapprochées et déterminées par la différence entre la largeur de BC et l'épaisseur de la courbe matérielle.

29. — OBTENTION D'UNE TEMPÉRATURE FONCTION DONNÉE DU TEMPS, PAR RÉGULATION CONTINUE

La solution que nous avons réalisée de ce problème, en 1920-1922, est toute différente de la précédente.

Nous voyons que, si l'on emploie le thermostat électromagnétique, réaliser une température variable avec le temps revient à faire varier convenablement avec ce dernier l'une des résistances d'équilibrage du pont. Simultanément, et pour conserver un intervalle d'emploi acceptable, on fera varier grossièrement dans le même sens la résistance additionnelle S' dans un circuit de chauffage auxiliaire (fig. 29).

En raisonnant comme au chapitre II, nous trouvons aisément :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + M \frac{dx}{dt} = N\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} + F\theta = \frac{q'}{c} + \frac{re^2}{cJ(w + ux)^2} - \frac{dT}{dt} + F(\tau - T).$$

La quantité $\frac{re^2}{cJ(w + ux)^2}$ est relative au dégagement de cha-

leur dans la résistance S du circuit réglé, celle dégagée dans S' est q' .

Avec les mêmes approximations qu'au chapitre II, on a :

$$(37) \quad \frac{d\theta}{dt} + F\theta = \frac{q'}{c} - \frac{dT}{dt} - 2L'\alpha x + G'$$

en posant

$$L' = \frac{re^2}{cJw^2} \quad G' = F(\tau - T) + L'.$$

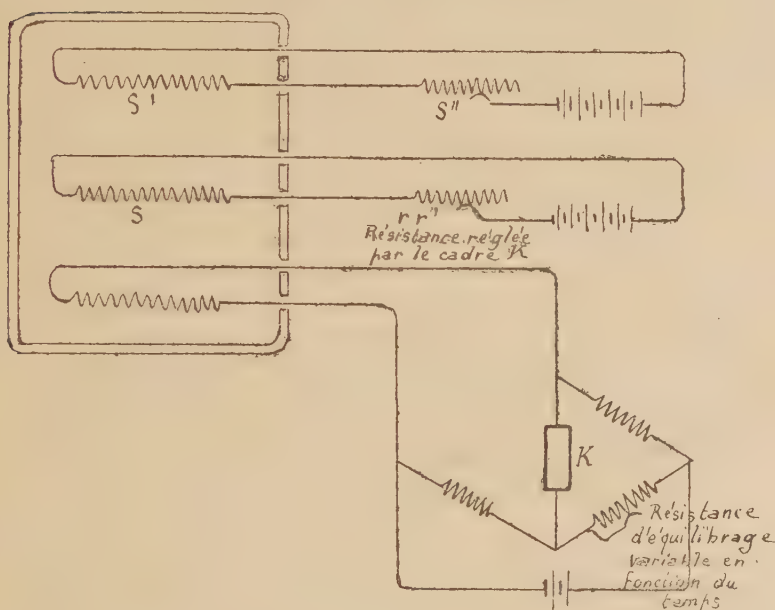


Fig. 29.

Nous serons donc ramenés aux mêmes équations qu'au chapitre II, si le rhéostat de réglage S'' du circuit auxiliaire fait varier q' de manière que l'on ait à peu près :

$$\frac{q'}{c} - \frac{dT}{dt} - F(\tau - T) = \text{constante} = B.$$

Les écarts seront alors corrigés par le régulateur *exacte-*

ment comme dans le cas du Chapitre II, où l'on veut maintenir T constant.

Soit e' la f.e.m. intercalée dans le circuit auxiliaire de chauffage ; la condition précédente donne

$$(S' + S'')^2 = \frac{S'e'^2}{cJ} \left[\frac{1}{B + F(\tau - T) + \frac{dT}{dt}} \right]$$

mais nous ne sommes pas obligés de réaliser pour S'' la loi rigoureuse de variation qui résulte de cette équation. Il suffit que les écarts soient corrigeables par le thermostat, dans les limites admissibles de variation pour x (entre 0 et X).

La seule résistance qui doit varier *rigoureusement* selon une loi donnée, est la résistance d'équilibrage du pont.

Nous avons résolu ce problème, et réalisé expérimentalement avec succès les appareils et expériences correspondants, en utilisant une généralisation du développement en série de Fourier, qui consiste à développer une fonction périodique quelconque à l'aide de deux fonctions périodiques fondamentales convenablement choisies. Rappelons d'abord le principe de ces développements ; soit à développer la fonction périodique :

$$Z(x) = \sum_n A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

à l'aide de deux fonctions périodiques $R(x)$, $S(x)$; cela n'est possible que si R et S satisfont à certaines conditions. En particulier, on vérifiera que c'est possible sous la forme

$$Z(x) = \sum_k M_k R(kx) + N_k S(kx)$$

si $R(x)$ et $S(x)$ sont respectivement de la forme

$$R(x) = \sum_p \alpha_p \sin px$$

$$S(x) = \sum_p \beta_p \cos px.$$

Ainsi, nous pourrons développer une fonction développable en série de Fourier, à l'aide des fonctions $R(x)$ et $S(x)$, également développables en série de Fourier. si le développement de R ne contient que des sinus, et celui de S que des cosinus.

Ce n'est là, bien entendu, qu'un cas particulier où le développement est possible, mais qui suffit pour le but que nous nous proposons. Les coefficients M_k et N_k se détermineront par la méthode des coefficients indéterminés (ce qui est plus commode en pratique) ou encore par des intégrales de Fourier généralisées, en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} R(kx)S(k'x)dt = 0$$

quels que soient k et k' , tandis que

$$\int_0^{2\pi} R(kx)R(k'x)dt \text{ et } \int_0^{2\pi} S(kx)S(k'x)dt$$

ont des valeurs calculables une fois pour toutes quand les types de fonctions R et S sont déterminés.

Il est évident que cette méthode nous offre le choix entre une infinité de moyens pour réaliser les résistances variables dont nous avons besoin, selon la manière dont nous choisirons les résistances élémentaires R et S . Toutefois deux remarques s'imposent :

1^o Comme des résistances sont essentiellement positives, R et S contiendront en réalité un terme additif constant dont il faudra tenir compte dans la sommation qui donne Z .

2^o Cela posé, nous pourrons réaliser ainsi, sous des conditions de continuité très générales, non seulement toute résistance variable *périodiquement*, mais encore une résistance variable de façon non périodique : il suffira évidemment de considérer cette variation comme représentant la *première demi-période* d'une fonction périodique.

Nous avons utilisé avec avantage, comme éléments simples S , des résistances tournantes composées d'une cir-

conférence en métal résistant (généralement un fil de constantan enroulé sur un cylindre isolant) sur laquelle frotte un balai, et dont un point fixe est relié à une bague au centre, le mouvement de rotation uniforme du système est assuré par l'intermédiaire d'un mouvement d'horlogerie; un train d'engrenages permet d'obtenir des vitesses angu-

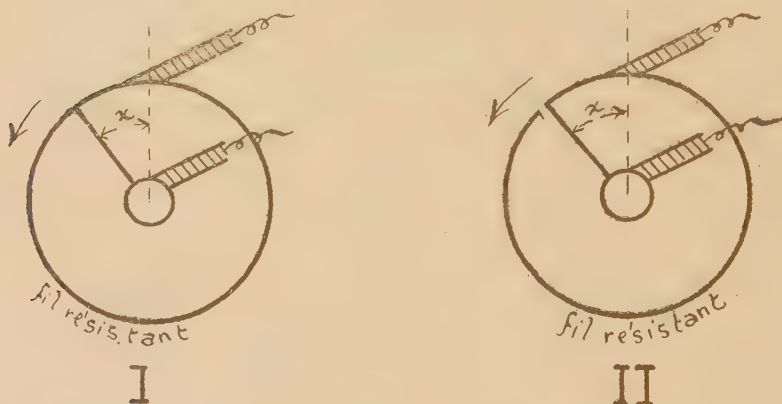


Fig. 30.

lares proportionnelles aux entiers successifs, et par conséquent d'entraîner à des vitesses convenables les diverses résistances S_k . Soit ρ la résistance de l'unité de longueur du fil employé; on a évidemment (fig. 30, I)

$$S = \frac{a\rho}{2\pi} x(2\pi - x)$$

d'où

$$S = \frac{2a\rho}{\pi} \sum_n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Comme élément simple R pour la représentation des termes en sinus, on utilise un fil interrompu (fig. 30, II) qui donne évidemment

$$R = a\rho x = -2a\rho \sum_n \frac{\sin nx}{n}.$$

A titre d'exemple, soit à réaliser par ce procédé une température fonction rigoureusement sinusoïdale du temps; nous serons conduits à faire varier la résistance d'équilibrage du pont suivant une loi de la forme $r_0(1 + \sin x)$, où $x = \omega t$ est proportionnel au temps. Nous utiliserons donc une résistance fixe, en série avec des résistances R convenablement choisies. Nous sommes conduits à poser;

$$r_0 \sin x = - \sum_k 2a\rho_k \sum_n \frac{\sin knx}{n}$$

ce qui donne

$$\rho_1 = - \frac{r_0}{2a}$$

$$\rho_2 = - \frac{\rho_1}{2} = + \frac{r_0}{4a}$$

$$\rho_3 = - \frac{\rho_1}{3} = + \frac{r_0}{6a}$$

$$\rho_4 = - \frac{\rho_1}{4} - \frac{\rho_2}{2} = - \frac{\rho_1}{4} + \frac{\rho_1}{4} = 0$$

$$\rho_5 = - \frac{\rho_1}{5} = - \frac{r_0}{10a}$$

$$\rho_6 = - \frac{\rho_1}{6} - \frac{\rho_2}{3} - \frac{\rho_3}{2} = - \frac{\rho_1}{6} + \frac{\rho_1}{6} + \frac{\rho_1}{6} = \frac{\rho_1}{6} = - \frac{r_0}{12a}$$

etc...

Il est clair qu'il n'y a nulle impossibilité à réaliser des valeurs *negatives* des ρ_i : cela revient à remplacer la fonction R_i correspondante par $-R_i$, donc à changer x en $-x$, *c'est-à-dire à faire tourner à l'envers la résistance circulaire correspondante.*

Le schéma de réalisation correspondant à ce cas particulier est donné fig. 31. Il est clair d'ailleurs que nous ne le donnons qu'à titre d'exemple, car si l'on veut réaliser une température variant sinusoïdalement, il est beaucoup plus simple d'utiliser le procédé donné au § 27. Tout l'intérêt du dispositif est de permettre la représentation d'une fonction quelconque du temps, pourvu que cette fonction

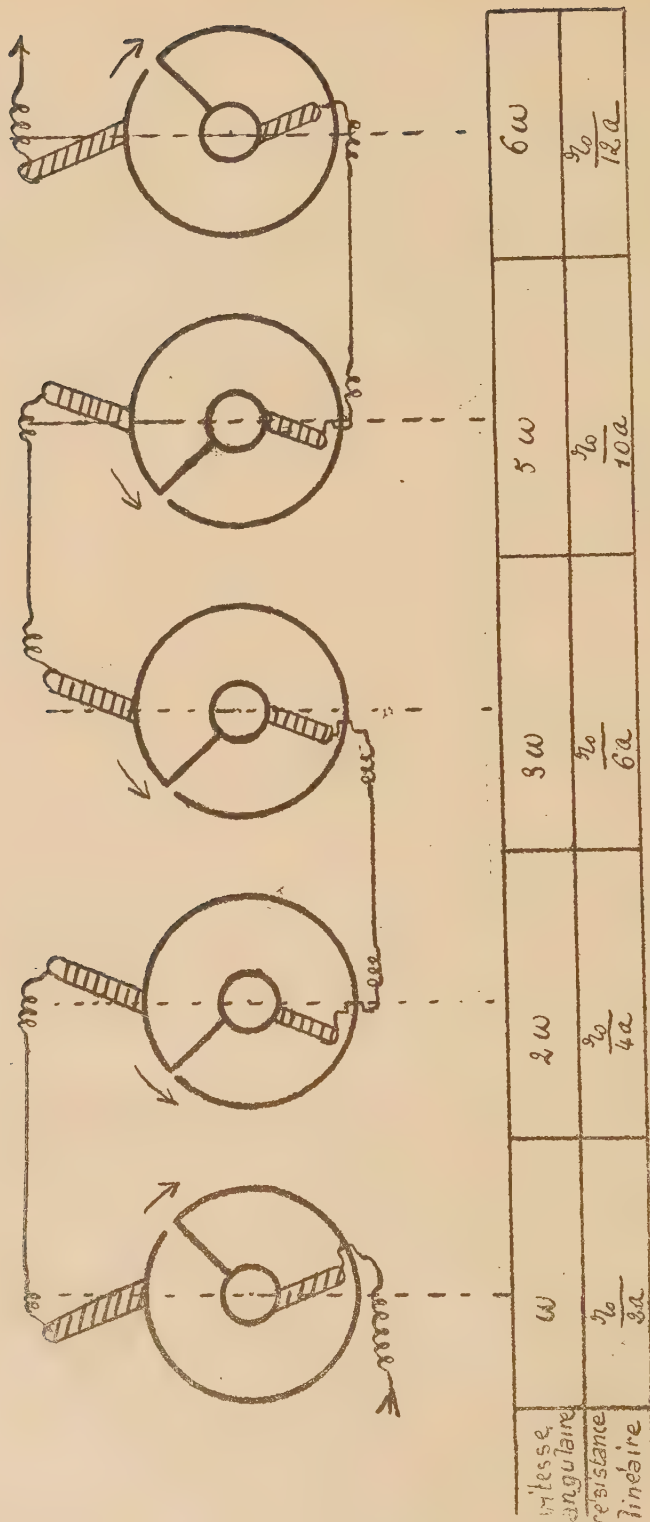


Fig. 31.

soit développable en série de Fourier — et vérifie certaines conditions d'inégalité (il faut évidemment que la température à maintenir reste toujours supérieure à la température ambiante ; il faut aussi qu'elle varie assez lentement [§ 33].

30. — AUTRE MÉTHODE POUR L'OBTENTION CONTINUE D'UNE TEMPÉRATURE FONCTION DU TEMPS

Cette autre méthode, que nous avons *imaginée et réalisée en 1925* est plus simple d'application que la précédente, et ne nécessite pas la connaissance du développement en série de Fourier de la fonction donnée. La résistance variable introduite dans le bras d'équilibrage du pont de Wheatstone, est ici la portion d'un fil de constantan comprise entre un point fixe et le niveau *variable* d'un bain de mercure.

Considérons (fig. 32) un bain de mercure dans une cuve prismatique base s ; soit h la hauteur initiale du mercure, où plonge le fil résistant dont on utilise la résistance entre A et le niveau du mercure. Réaliser une température donnée dans l'étuve, revient à réaliser une variation de longueur utile de ce fil selon une loi qui se déduit de la précédente.

Introduisons dans le mercure un déplaceur, découpé selon une certaine courbe $y = \varphi(t)$ dans une planche d'épaisseur e . Pour un enfoncement x du déplaceur par rapport au niveau primitif, le mercure se soulève d'une certaine hauteur z , et l'on a :

$$(h + z)s = hs + e \int_0^{x+z} \varphi(t) dt$$

d'où

$$zs = e \int_0^{x+z} \varphi(t) dt.$$

Or, si nous enfonçons le déplaceur d'un mouvement uni-

forme, et que nous voulions faire varier convenablement en fonction du temps la portion de fil résistant utilisée, nous

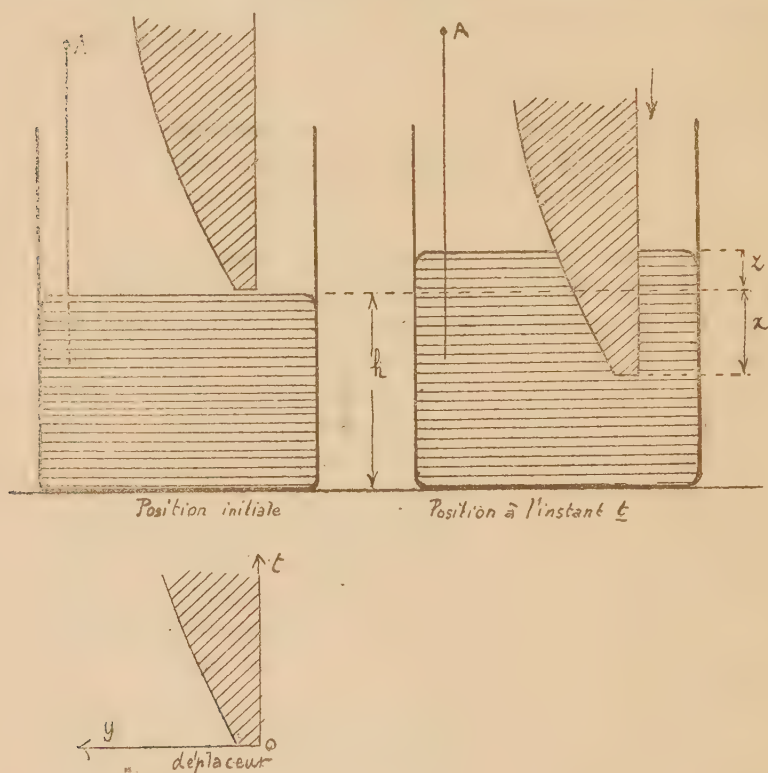


Fig. 32.

serons conduits à faire varier z en fonction de x selon une loi donnée

$$z = F(x).$$

Inversons cette fonction :

$$x = G(z).$$

nous aurons

$$x + z = z + G(z)$$

d'où par une nouvelle inversion

$$z = K(x + z)$$

et l'équation intégrale à résoudre devient

$$sK(t) = e \int_0^t \varphi(t) dt$$

d'où nous tirons la forme du déplaceur

$$\varphi(t) = \frac{s}{e} K'(t) + \text{constante}$$

la constante étant d'ailleurs nulle si nous réglons la longueur initiale du fil, au moment où le déplaceur va entrer dans le mercure, de façon à obtenir dans l'étuve la température initiale.

En définitive, la fonction $z = F(x)$ étant imposée par la variation de température à obtenir, les opérations à effectuer sont les suivantes :

1° Réaliser l'inversion de cette fonction, d'où

$$x = G(z).$$

2° Inverser $t = z + G(z)$, ce qui donne

$$z = K(t).$$

3° On a alors pour la forme du déplaceur

$$y = \frac{s}{e} K'(t).$$

en choisissant convenablement la longueur initiale du fil.

Ces opérations peuvent s'effectuer par le calcul si l'expression mathématique de la loi de variation à réaliser est donnée. Mais si on se borne à donner une courbe de température à réaliser, l'en en déduit la courbe $z = F(x)$, et les trois opérations décrites plus haut s'effectuent géométriquement avec beaucoup de simplicité, les deux premières se ramenant à l'inversion du rôle des deux axes et à une

addition, aux ordonnées d'une courbe, des ordonnées d'une droite ; la troisième consiste à tracer la courbe, qui représente la variation du coefficient angulaire d'une tangente.

On remarque que les opérations ainsi décrites (par *enfouissement* du déplaceur) ne se rapportent qu'au cas où la température donnée est une fonction *décroissante* du temps. Pour une fonction *croissante*, il faudrait *retirer* un déplaceur initialement plongé dans le mercure ; et pour une fonction alternativement croissante et décroissante, il faudrait utiliser un déplaceur sortant et un déplaceur entrant fonctionnant simultanément. Comme une fonction quelconque peut être considérée *d'une infinité de manières*, comme la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, on aura le choix, pour ces deux déplaceurs, entre une infinité de systèmes de formes, et on choisira naturellement les plus simples. On peut d'ailleurs prendre toujours pour l'un d'eux un solide à section constante, cette section ayant toutefois une valeur suffisante ; l'autre déplaceur se trouve alors déterminé.

34. — RÉGULATEURS DIVERS UTILISANT UN SYSTÈME GALVANOMÉTRIQUE EN ÉQUILIBRE INDIFFÉRENT, ASSOCIÉ A UN RHÉOSTAT.

Le principe du thermostat continu électromagnétique, que nous avons décrit au chapitre II, se prête à de nombreuses modifications, qui permettent d'en déduire des régulateurs ou variateurs applicables à d'autres paramètres que la température, et que nous signalons à titre de simples suggestions.

L'on voit d'abord immédiatement :

1^o Qu'en utilisant pour R_T , non plus une résistance placée dans une étuve, mais un véritable bolomètre exposé au rayonnement d'une lampe électrique dont le circuit com-

prend les arcs rr' , nous réalisons un régulateur d'intensité lumineuse ;

2° Qu'en remplaçant R_T par une spirale de bismuth placée dans le champ d'un électro dont le circuit d'excitation contient rr' , nous réaliserons, malgré des variations extérieures possibles, un champ magnétique rigoureusement constant.

D'autre part, calons sur l'axe du système galvanométrique une petite poulie à gorge P dans laquelle viendra s'enrouler un fil supportant un poids mg : l'appareil, séparé du pont de Wheatstone auquel il était précédemment associé, n'est plus en équilibre que pour *un sens et une intensité* bien déterminés du courant qui traverse le cadre.

Les arcs rr' étant alors intercalés dans le circuit du cadre, nous réalisons un *régulateur d'intensité de courant*, et corrélativement nous pourrions ainsi réaliser un régulateur de *tension* en branchant le cadre mobile aux bornes d'une résistance en série avec rr' , et aux extrémités de laquelle nous désirons maintenir constante la tension U.

Nous n'insistons pas sur ces diverses applications, que l'on multipliera aisément, et dont l'étude théorique, après les calculs faits au chapitre II, n'offre aucune difficulté sérieuse. Mais nous avons tenu à donner des indications sur d'autres possibilités d'emploi de notre appareil.

32. — CONDITIONS DE SENSIBILITÉ ET DE RÉGLAGE DES APPAREILS CONTINUS ÉTUDIÉS AUX CHAPITRES II ET III

Nous éclaircissons ici quelques points sur lesquels nous avons glissé rapidement pour ne pas trop alourdir une première description.

a) *Réglage de l'équilibre indifférent*. — Ce réglage n'est évidemment possible que si les couteaux ont des arêtes suffisamment collinéaires ; l'étude des couteaux doit être faite expérimentalement d'après les indications suivantes :

1° Si les arêtes des couteaux ne sont pas dans un même plan, et que l'on cherche à réaliser l'équilibre indifférent, on ne peut y parvenir, mais on trouve **deux** positions d'équilibre absolu, qui correspondent au repos de l'appareil, sur le plan d'appui des couteaux, par un triangle de sustentation formé par un couteau et un point de l'autre ;

2° Si les couteaux sont parallèles et non collinéaires, il y a une seule position d'équilibre absolu ;

3° Si les couteaux sont coplanaires et font entre eux un petit angle α , chacun des couteaux ne touche qu'en un point l'arête du plan de repos correspondant (points M et N de la figure 33).

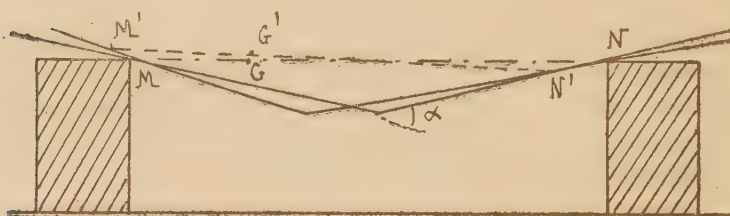


Fig. 33.

L'équilibre indifférent peut alors être réalisé, mais si l'on déplace longitudinalement le système mobile sur ses supports les points M et N sont déplacés en M' et N' ; le centre de gravité G n'est plus sur MN, de sorte que l'équilibre devient *stable* ou *instable* selon que le déplacement axial a lieu dans un sens ou dans l'autre.

Toutefois, l'angle α étant toujours très petit, ce défaut est souvent tolérable ; il suffit évidemment que le couple qui en résulte soit inférieur au couple de frottement de roulement qui définit la sensibilité statique.

En fait, le meilleur moyen que nous ayons trouvé pour réaliser la collinéarité des couteaux, a été de les roder sur un même prisme à base triangulaire, en acier dur ⁽¹⁾, que l'on introduit ensuite dans l'axe tubulaire de l'appareil.

(1) Non trempé pour éviter les déformations dues à la trempe.

Les arcs rr' sont en invar et rigoureusement centrés. On les obtient par tournage, en prenant toutes les précautions

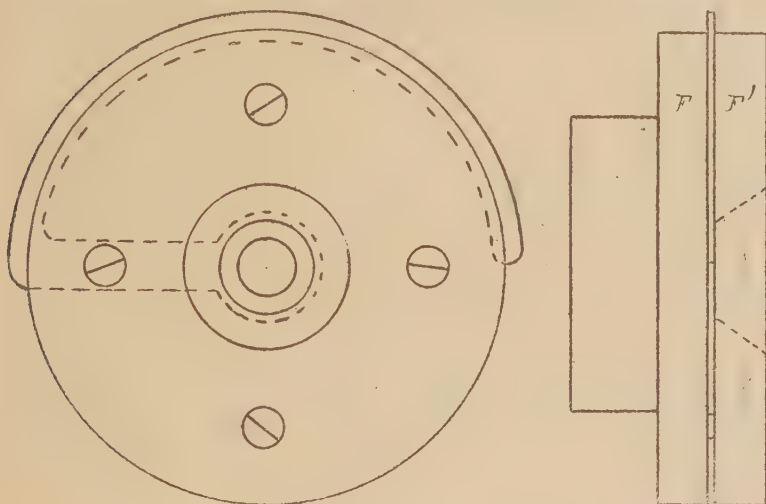


Fig. 34.

possibles pour éviter les flexions. Ils sont pincés, pendant le travail au tour, entre deux flasques F et F' (fig. 34) et on ne les travaille que par passes très légères.

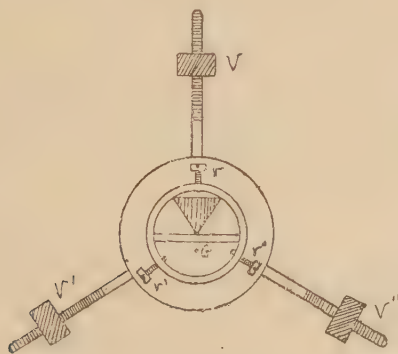


Fig. 35.

Le réglage de l'équilibre indifférent est délicat et doit être effectué systématiquement, d'abord avec les écrous V, V', V''

(fig. 35) puis avec les vis v, v', v'' de petit diamètre et à filet très fin (pas 0,1 mm., diamètre 1 millimètre).

L'emploi des arcs rr' en *invar* est indispensable si l'on veut maintenir à toute température le réglage de l'équilibre indifférent.

b) *Détermination des résistances du pont de Wheaststone, dimensions optima du cadre mobile.* — Le couple agissant sur le cadre, lorsque ZW est parcouru par un courant i , est, en appelant P la puissance dépensée dans le cadre et G sa résistance :

$$\gamma = SHi = SH\sqrt{\frac{P}{G}}.$$

Pour des raisons mécaniques évidentes, le poids de fil porté par le cadre est limité ; soit ϖ ce poids, λ le périmètre du cadre, s la surface d'une spire, σ la section du fil, n le nombre de tours, δ et ρ la densité et la résistivité du cuivre. Nous avons

$$\varpi = \lambda n \sigma \delta, \quad G = \frac{\rho n \lambda}{\sigma}, \quad S = ns$$

d'où aisément

$$\frac{S}{\sqrt{G}} = \sqrt{\frac{\varpi}{\delta} \cdot \frac{s}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\rho}}$$

$\frac{\varpi}{\delta}$ et $\frac{1}{\rho}$ sont donnés, tandis que $\frac{s}{\lambda^2}$ dépend de la forme du cadre mobile. Pour un cadre rectangulaire dont l'un des côtés serait m fois plus grand que l'autre, on aurait

$$\frac{s}{\lambda^2} = \frac{m}{4(m+1)^2}.$$

Il y a donc intérêt à prendre un cadre *carré* pour lequel cette expression est maximum et égale à $\frac{1}{16}$ ou 0,0625. Pour un cadre circulaire $\frac{s}{\lambda^2}$ serait encore plus grand (0,079) mais des difficultés évidentes de réalisation nous ont conduits à adopter un cadre *carré*.

D'autre part, il y a intérêt, pour augmenter θ_s , à augmenter la puissance P dépensée dans le cadre. La puissance Π dépensée dans la résistance thermométrique étant limitée

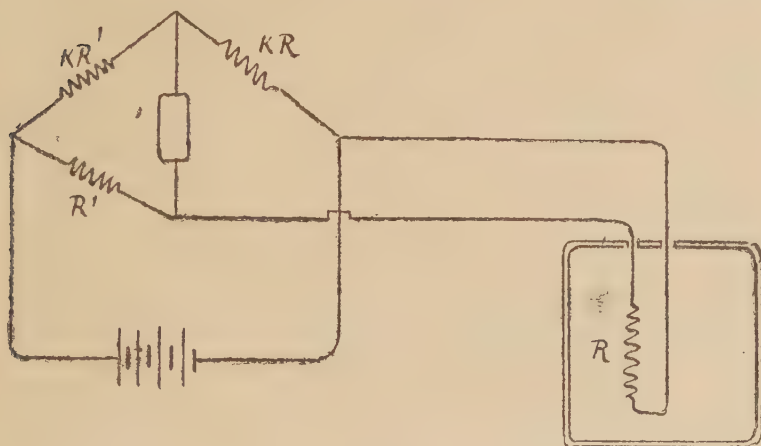


Fig. 36.

nous la considérerons comme donnée. Si R et R' sont les résistances des bras de pont (fig. 36) on a alors

$$i = \frac{\sqrt{\Pi R R'} a \theta}{G(R + R') + R R'(1 + K)}$$

d'où

$$P = \frac{\Pi R G R'^2 a^2 \theta^2}{[G(R + R') + R R'(1 + K)]^2}$$

la valeur optimum de G est

$$G = \frac{R R'(1 + K)}{R + R'}$$

d'où pour cette valeur :

$$\frac{\Pi R' a^2 \theta^2}{4(R + R')(1 + K)}.$$

Si nous introduisons la puissance totale W dépensée dans

les 4 bras du pont, et que nous cherchions le maximum de P par rapport à K , nous trouvons aisément

$$K = \frac{\Pi + \sqrt{W\Pi}}{W - \Pi}$$

avec

$$P = \frac{\alpha^2 0^2 \Pi}{4W} [\sqrt{W} - \sqrt{\Pi}]^2$$

qui est maximum à son tour quand, W étant donné, l'on prend

$$\Pi = \frac{W}{4}.$$

d'où l'on tire $R = R'$, $K = 1$, ce qui justifie les dispositions adoptées jusqu'à présent (bras de pont égaux et de même résistance que le cadre mobile).

33. — EXPÉRIENCES RÉALISÉES SUR LES VARIATEURS DE TEMPÉRATURE

Nous avons utilisé pendant longtemps, dans des recherches sur le rapport des conductibilités calorifique et électrique, le procédé du § 27 pour réaliser des variations sinusoïdales de température, et la régularité de son fonctionnement est telle que, même pour des valeurs de TC_2 différant de TC_2 de presque 5%, on peut maintenir des oscillations pendant *plusieurs heures* avec une amplitude totale de l'ordre de 40 à 50 degrés.

Nous avons également réalisé avec succès les dispositifs des § 29 et 30. Le premier a été réalisé pour une variation (*sinusoïdale* dispositif de la figure 31) et pour une variation linéaire.

Ces expériences nous ont montré qu'il est très facile de réaliser une variation *lente* avec une précision du même ordre que celle fournie par le thermostat, mais que des variations *rapides* ne peuvent être obtenues, lorsqu'il s'agit de

baisses de température. La raison simple de ce fait est que la résistance grossièrement réglée S'' nous permet bien de dégager dans S' (fig. 29) une quantité de chaleur aussi grande que nous voudrions, et par conséquent *de faire croître la température de l'étuve avec une vitesse quelconque*.

Au contraire, les chutes de température n'étant dues qu'au refroidissement, on ne peut réaliser de décroissance plus rapide que celle qui résulte de la courbe de refroidissement.

On peut cependant résoudre cette difficulté et obtenir un refroidissement rapide en créant artificiellement, dans l'étuve, en même temps qu'un dégagement de chaleur, une *absorption de chaleur* due au passage, dans un serpentin en cuivre, d'un courant de saumure refroidi extérieurement par un mélange de glace et de sel.

Pour éliminer l'influence des résistances de contact dans les appareils du § 29, nous avons été conduits, non pas à réaliser *directement* la résistance d'équilibrage R à l'aide de conducteurs tournants mis en série avec une résistance fixe, mais à shunter une résistance fixe (de l'ordre de 4 ohms) par l'ensemble de ces conducteurs tournants placés en série; comme les variations de résistance à obtenir sont très faibles, il faut alors donner à la résistance linéaire des fils circulaires une grande valeur, devant laquelle les résistances au contact des balais sont tout à fait négligeables.

Le dispositif à déplaceur du § 30 est d'une réalisation pratique beaucoup plus simple; dans les expériences que nous avons faites, l'on utilisait simultanément le même bain de mercure pour faire varier la résistance d'équilibrage et la résistance S'' du circuit de chauffage auxiliaire, ce qui simplifiait beaucoup le montage. La résistance S'' était constituée par un fil roulé en hélice sur un cylindre de porcelaine. Comme il s'y dégage une quantité de chaleur assez considérable, et qu'il pourrait en résulter l'introduction de f. e. m. thermoélectriques entre le fil servant à l'équilibrage du pont et le mercure, le bain de mercure est alors constitué

par 2 vases communicants : l'un de grand diamètre, contient S'' et le déplaceur, l'autre est un tube de 8 millimètres de diamètre où plonge le fil qui sert à l'équilibrage du pont. Comme dans les expériences faites sur le variateur harmonique du § 29, ce fil n'était d'ailleurs qu'un shunt placé sur la résistance d'équilibrage.

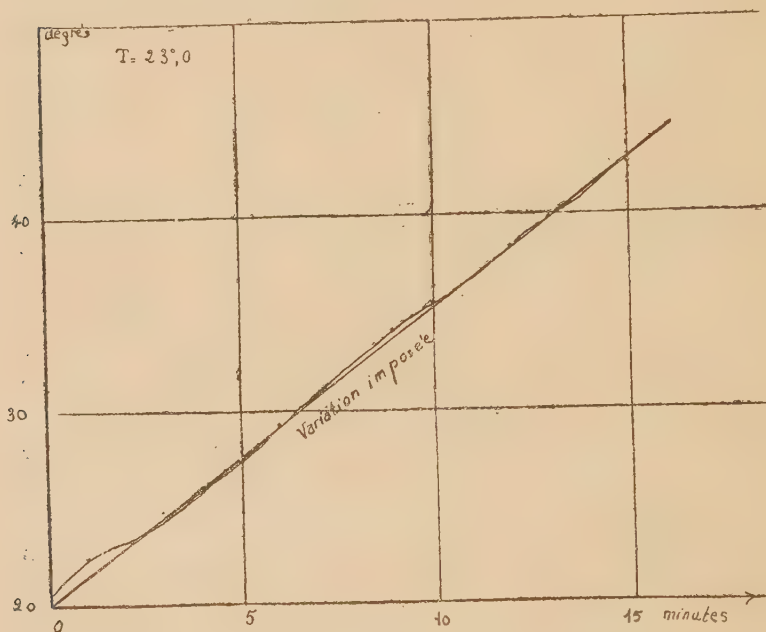


Fig. 37.

Les résultats que ces expériences ont mis en évidence, sont :

1° La réalisation d'une température variable selon une loi donnée peut être considérée comme **complètement résolue**. Nous avons réalisé les variations suivantes :

a) *Variation linéaire croissante* (courbe de la figure 37 obtenue avec un déplaceur cylindrique)

b) *Variation en trapèze*. — La courbe 38 donne les résultats obtenus avec un variateur harmonique, en limitant le

développement aux trois premiers termes (pour faire disparaître la légère incurvation dans la partie horizontale, il faudrait utiliser 4 termes).

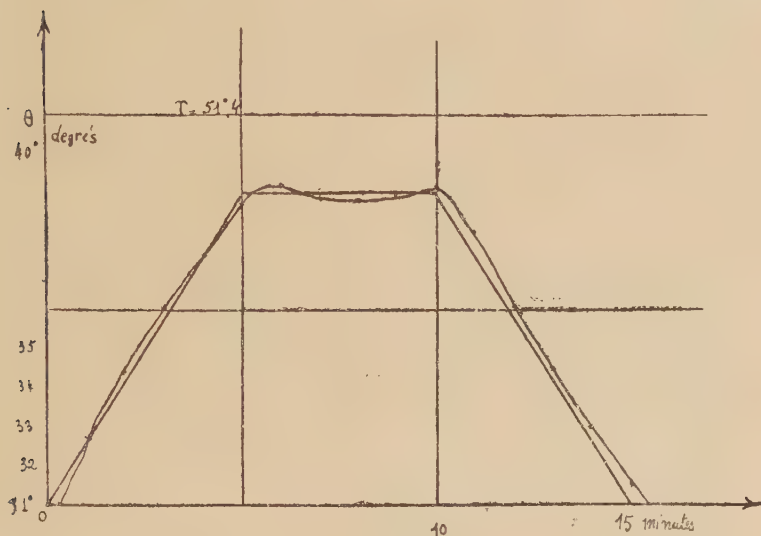


Fig. 38.

c) Enfin de nombreuses expériences de variation sinusoïdale qui ont été comparées en vue de mesurer des conductibilités thermiques, puis abandonnées, bien qu'ayant fourni de bons résultats, pour la méthode plus simple qui consiste à utiliser les oscillations propres du système étuve-régulateur pour les valeurs de $\mathcal{H}$ voisines du champ critique.

2° Des deux dispositifs réalisés (variateur harmonique et variateur à déplaceur) le second, quoique moins élégant, est certainement le plus simple et le plus pratique ; il permet un montage simple et rapide, exécutable avec un matériel moins dispendieux que le variateur harmonique.

CONCLUSIONS

L'on voit, de l'ensemble des recherches théoriques et des vérifications expérimentales exposées dans les chapitres précédents, se dégager plusieurs ordres de faits nouveaux :

1° L'établissement d'une théorie complète et cohérente des divers appareils thermostatiques ;

2° La mise en lumière et la vérification expérimentale de plusieurs conséquences importantes de cette théorie, conséquences qui semblent, jusqu'à présent et malgré leur importance pratique, n'avoir pu être dégagées de la masse des résultats expérimentaux fournis par divers auteurs ;

3° L'indication et la mise au point complète de deux méthodes de mesure des conductibilités thermiques, utilisant les principes posés par Ångström, mais comportant des perfectionnements de technique destinés à en faciliter considérablement l'application ;

4° Enfin la création d'appareils régulateurs et variateurs de haute précision, fondés sur un principe nouveau, et constituant un progrès réel sur les divers appareils actuellement employés.

En ce qui concerne tout d'abord la théorie des thermostats, nous avons cherché, non seulement à donner *l'allure* des phénomènes, *mais encore à faire de cette théorie un guide sûr pour l'expérimentateur qui aura à employer ces appareils*. A ce point de vue, nous avons étudié et décrit la méthode la plus pratique de réglage systématique des

appareils, en y joignant toutes les fois que cela nous a semblé devoir être utile, des abaques destinés à simplifier les calculs.

Parmi les conséquences intéressantes de la théorie, nous citerons les rôles relatifs du rapport $\frac{\rho'}{c}$ et du retard ϵ , permettant de départager les appareils discontinus en catégories bien tranchées; ceux pour lesquels $\frac{\rho'}{c}$ est négligeable maintiennent dans l'étuve une température qui oscille constamment entre deux limites, avec une période bien déterminée, ils sont très peu sensibles aux variations extérieures. D'autre part, ceux pour lesquels $\frac{\rho'}{c}$ ne peuvent être négligés ne règlent que lentement et sont sensibles aux fluctuations extérieures de température; mais, si ces dernières sont faibles et que ϵ puisse être rendu négligeable, ces appareils tendent à maintenir un régime limite pour lequel les oscillations sont très petites.

Pour ce qui est des appareils continus étudiés au chapitre II (voir également note II) la théorie des appareils montre que l'on a considéré souvent comme thermostats des appareils tout à fait défectueux, au moins en principe, puisque la température qu'ils tendent à maintenir est, non pas constante, mais fonction de la température ambiante. Leur emploi n'est guère possible que dans des opérations industrielles où l'on peut tolérer des variations de température d'un ordre de grandeur relativement élevé.

Les modifications de la méthode d'Ångström que nous avons indiquées présentent deux ordres différents de simplifications. La première (chapitre I, § 7) simplifie considérablement *les expériences*; la seconde (chapitre III, § 27), tout en rendant l'expérience pratique, *supprime les calculs*, ordinairement laborieux, qu'entraîne la méthode d'Ångström, et, de ce fait, abrège beaucoup le temps nécessaire à la mesure. *C'est en même temps la méthode la plus précise dont nous puissions actuellement disposer pour la me-*

sure des conductibilités thermiques des solides : à la non-influence de la conductibilité extérieure, qui est l'avantage principal de la méthode d'Ångström, elle joint, en effet, *l'absence de toute approximation* et de toute incertitude en ce qui concerne la représentation de la température en un point quelconque de la barre étudiée.

Enfin, les appareils nouveaux que nous avons étudiés et réalisés, présentent, avec le caractère de régulateurs de haute précision, deux autres qualités intéressantes : la première est qu'ils sont entièrement calculables et prédéterminables, et que, sous réserve d'une réalisation mécanique correcte, on peut prévoir sans mécompte possible les résultats qu'ils permettront d'obtenir. La deuxième propriété intéressante est la *souplesse* de ces appareils, adaptables (voir § 27, 29, 30) à l'obtention de températures variables continuellement et aussi (§ 31) à la régulation d'autres variables que la température (régulateurs d'intensité lumineuse, de champ magnétique, d'intensité de courant, etc.).

En définitive, nous espérons que ce travail, tant par l'étude complète des propriétés des thermostats existants, que par celle des appareils nouveaux que nous avons réalisés, facilitera la tâche des expérimentateurs, d'abord en leur évitant tout tâtonnement ou déboire, et ensuite en mettant à leur disposition quelques techniques nouvelles et quelques appareils intéressants.

NOTE I

DÉTERMINATION DU RÉGIME PÉRIODIQUE LIMITE DANS LE CAS GÉNÉRAL DES RÉGULATEURS DISCONTINUS

D'après le chapitre I^{er} (§ 9 et 10) nous devons passer de l'une à l'autre des solutions de

$$(\alpha'') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} \frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt} + s = \theta_1$$

et de

$$(\beta''') \quad \frac{cc'}{\rho\rho'} + \left(\frac{c}{\rho} + \frac{c'}{\rho'} \right) \frac{ds}{dt} + s = \theta_2$$

avec un retard ε à partir du moment où s s'est annulé. Considérons comme instant initial l'un des instants où s s'annule pendant que la température *croît* (fig. 39). Les passages successifs de (α''') à (β''') ou réciproquement ont lieu en $t_1, \varepsilon, t_3 + \omega$, etc. Pour que le régime soit périodique, il faut évidemment que nous retrouvions indéfiniment les mêmes arcs AMBNC, donc il faut que les ordonnées de A et C soient égales et que les tangentes en ces points soient parallèles.

Posons, pour abréger :

$$\alpha = -\frac{\rho}{c} \quad \beta = -\frac{\rho'}{c'}.$$

Le long de AMB, s est de la forme

$$s = Ae^{\alpha t} - (A + \theta_1)e^{\beta t} + \theta_1$$

et le long de BNC :

$$s = A'e^{\alpha t} + B'e^{\beta t} + \theta_2.$$

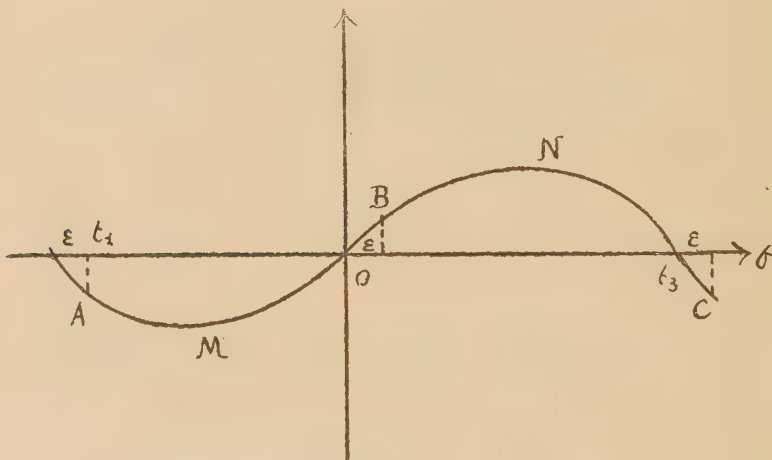


Fig. 39.

Ecrivons :

1° Que les deux arcs se raccordent pour $t = \varepsilon$:

$$Ae^{\alpha\varepsilon} - (A + \theta_1)e^{\beta\varepsilon} + \theta_1 = A'e^{\alpha\varepsilon} + B'e^{\beta\varepsilon} + \theta_2$$

$$\alpha Ae^{\alpha\varepsilon} - \beta(A + \theta_1)e^{\beta\varepsilon} = \alpha A'e^{\alpha\varepsilon} + \beta B'e^{\beta\varepsilon}.$$

2° Que l'arc BNC rencontre OT en t_3

$$A'e^{\alpha t_3} + B'e^{\beta t_3} + \theta_2 = 0.$$

3° Qu'en A et C, l'on a la même valeur de s et de $\frac{ds}{dt}$:

$$Ae^{\alpha t_1} - (A + \theta_1)e^{\beta t_1} + \theta_1 = A'e^{\alpha(t_3+\varepsilon)} + B'e^{\beta(t_3+\varepsilon)} + \theta_2$$

$$\alpha Ae^{\alpha t_1} - \beta(A + \theta_1)e^{\beta t_1} = \alpha A'e^{\alpha(t_3+\varepsilon)} + \beta B'e^{\beta(t_3+\varepsilon)}.$$

Posons enfin

$$e^{\alpha t_3} = x \quad e^{\alpha t_1} = y \quad \frac{\beta}{\alpha} = \mu.$$

Les cinq équations précédentes renferment cinq quantités inconnues

$$x, y, A, A', B'.$$

On élimine facilement d'abord y , puis A, A' et B' , et, en posant

$$\varphi = \frac{\beta(\theta_1 - \theta_2)}{(\beta - \alpha)e^{\alpha\epsilon}} \quad \psi = \frac{\alpha(\theta_1 - \theta_2)}{(\alpha - \beta)e^{\alpha\epsilon}} \quad (\alpha \neq \beta)$$

il reste l'équation

$$\begin{aligned} \frac{x^{\mu+1}(\varphi + \psi - \theta_1) + (\psi + \theta_2)x^{\mu} - \psi x}{\psi x^{\mu} + (\varphi - \theta_1)x + \theta_2} &= \\ &= \left[\frac{x^{\mu+1}(\varphi + \psi - \theta_1) - \varphi x^{\mu} + (\varphi + \theta_2)x}{(\psi - \theta_1)x^{\mu} + \varphi x + \theta_2} \right]^{\mu} \end{aligned}$$

cette équation admet la racine $x = 0$ que nous écarterons ($t_2 = \infty$) et $x = 1$, d'où $t_3 = 0$ (raccordement au point B)

Si cette équation admet une autre racine positive inférieure à 1 nous pourrions déterminer t_2 , d'où t_1, A, A', B' ; il y aura donc un régime périodique compatible avec les équations (α''') et (β''') .

En éliminant le facteur x , l'équation précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{x^{\mu}(\varphi + \psi - \theta_1) + (\psi + \theta_2)x^{\mu-1} - \psi}{\psi x^{\mu} + (\varphi - \theta_1)x + \theta_2} &= \\ \left[\frac{x^{\mu}(\varphi + \psi - \theta_1) - \varphi x^{\mu-1} + \varphi + \theta_2}{(\psi + \theta_1)x^{\mu} + \varphi x + \theta_2} \right] x^{\mu-1} &= 0. \end{aligned}$$

La discussion complète montre que, en appelant z le premier membre de cette équation, la fonction $z = f(x)$ est représentée par l'une ou l'autre des courbes de la figure 40 selon que μ est plus grand ou plus petit que 1; il y a donc toujours une racine de l'équation précédente comprise entre 0 et 1, et par conséquent il existe effectivement un régime périodique, vers lequel tendra s au bout d'un temps suffisamment long.

Nous nous bornons à donner ici en quelques mots une idée de la discussion complète : supposons, par exemple, $\mu > 1$. Alors $\beta < \alpha$; d'autre part θ_1 est toujours positif, θ_2 toujours négatif, donc ψ est négatif, ainsi que la valeur $-\frac{\psi}{\theta_2}$ que prend z pour $x = 0$.

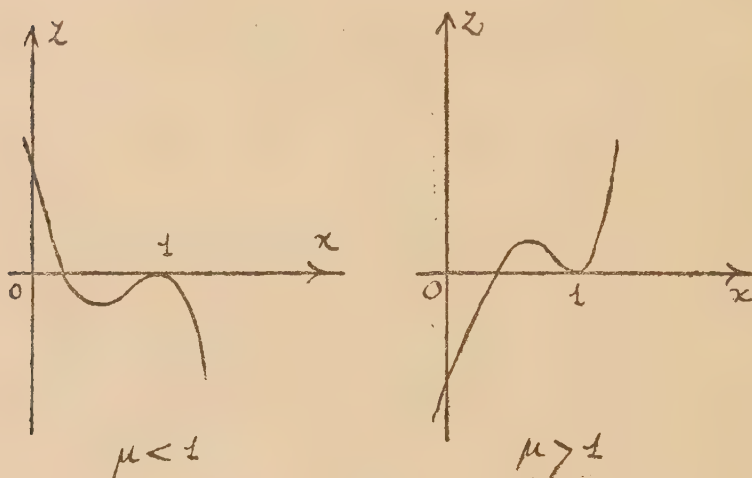


Fig. 40.

D'autre part $\frac{dx}{dz}$ est nul pour $x = 1$, et on a

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=1} = -\frac{2\mu(\mu-1)(\varphi+\psi)}{\varphi+\psi-\theta_1+\theta_2}$$

soit approximativement $-\frac{4\mu(\mu-1)}{\epsilon^2\alpha\beta(\alpha-\beta)}$ en tenant compte des valeurs de ρ et de ψ .

Donc $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=1}$ est positif, la courbe $z = f(x)$ tourne en ce point sa concavité vers le haut comme on le voit figure 40 ; et comme z_0 est négatif, elle rencontre nécessairement ox entre 0 et 1.

NOTE II

SUR CERTAINS THERMOSTATS CONTINUS

Nous avons vu au début du chapitre II (§ 17) pourquoi certains appareils continus, préconisés comme thermostats, n'en n'ont pas le caractère essentiel, qui est de maintenir une température moyenne indépendante de la température extérieure.

Au lieu d'établir ce fait à l'aide des équations mêmes du problème, on peut utiliser une remarque très générale s'appliquant d'ailleurs à d'autres questions du même genre.

Considérons un régulateur quelconque destiné à maintenir un paramètre u à la valeur u_0 ; admettons qu'un état du système régulateur soit caractérisé par les valeurs d'un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ et que les équations différentielles régissant toute *transformation* du système renferment outre $u, \alpha, \beta, \gamma \dots$ et leurs dérivées, certaines grandeurs perturbatrices $\tau, \tau', \tau'' \dots$ imposées de l'extérieur au système et dont la variation peut être quelconque. Cela posé, pour que le système considéré soit un *régulateur*, il est nécessaire que, pour *tout* systèmes de valeurs constantes de $\tau, \tau', \tau'' \dots$ il tende vers un état d'équilibre où $\alpha, \beta, \gamma \dots$ peuvent avoir des valeurs quelconques, fonctions de τ, τ', τ'' , mais où u a la valeur u_0 .

Nous avons développé ces considérations, qui pourraient être considérées comme une définition générale des systèmes régulateurs, dans le cas particulier du thermostat continu électromagnétique, au chapitre II (§ 19).

Si, au contraire, la valeur d'équilibre de u , est fonction des valeurs d'équilibre de α , β , γ ... elles-mêmes fonctions de τ , τ' , τ'' ..., l'appareil n'est pas un régulateur.

NOTE III

SUR L'EMPLOI DE RÉSISTANCES THERMO- MÉTRIQUES OU IL SE DEPENSE UNE PUISSANCE NOTABLE

Pour qu'une résistance intercalée dans l'un des bras d'un pont de Wheatstone puisse servir de résistance *thermométrique*, il peut et il suffit que sa température soit une fonction *bien déterminée et uniforme* de celle du milieu où elle est plongée. Cherchons à quelles conditions il pourra en être ainsi.

Soit θ la température du milieu et s celle de la résistance, comptées à partir d'une origine quelconque ; soit

$$R(1 + as)$$

la valeur, en ohms, de la résistance thermométrique, soit

$$Q(s, \theta)$$

la quantité de chaleur que cette résistance *cède* chaque seconde au milieu ambiant, et c sa masse en eau. Nous aurons :

$$c \frac{ds}{dt} + Q(s, \theta) = R(1 + as)i^2.$$

Avec les notations du chapitre II, où E est la f. e. m.

d'alimentation du pont et où les 4 bras sont sensiblement égaux, on a :

$$i = \frac{E}{R(2 + as)}$$

d'où

$$c \frac{ds}{dt} + Q(s, \theta) = \frac{E^2}{R} \frac{1 + as}{(2 + as)^2}.$$

Quelle que soit la fonction $Q(s, \theta)$ qui définit la chaleur rayonnée par la résistance, deux questions bien distinctes méritent d'être étudiées : la *valeur* de s correspondant, *en régime d'équilibre* à une valeur donnée de θ ; et la *vitesse* avec laquelle cette température d'équilibre est atteinte.

Nous voyons que la valeur de s en régime d'équilibre, est donnée par

$$Q(s, \theta) = \frac{E^2}{R} \frac{(1 + as)}{(2 + as)^2}.$$

Comme d'autre part s est plus grand que θ , puisque nous supposons qu'il y a dégagement de chaleur dans la résistance thermométrique, tout revient à vérifier que cette équation n'admet qu'une racine en s . Si l'on admet la loi de Newton, l'équation précédente devient

$$\frac{s - \theta}{1 + as} = \frac{E^2}{R\rho(2 + as)^2}.$$

Il y a évidemment une seule racine positive, donnée par l'intersection de la parabole

$$y = R\rho(2 + as)^2$$

avec l'hyperbole

$$y = \frac{E^2(1 + as)}{s - \theta}.$$

D'autre part, la *vitesse* avec laquelle s'établit le régime d'équilibre dépend de $\frac{c}{\rho}$ pour la résistance considérée, et

nullement de la puissance moyenne $\frac{E^2}{R}$ dépensée dans cette résistance.

D'où nous concluons qu'il n'y *aucun inconvénient* à ce qu'il se dépense une puissance notable dans la résistance thermométrique ; la température s de cette résistance diffère alors de θ , *mais elle en suit les variations avec autant de fidélité que quand la puissance dépensée dans la résistance est négligeable* — contrairement à ce qui a lieu quand le décalage entre θ et s est dû à une grande valeur de $\frac{c}{\rho}$.

Toutefois, pour que cette conclusion soit correcte, il est nécessaire que l'équation.

$$\frac{s - \theta}{1 + \alpha s} = \frac{E^2}{\rho R (2 + \alpha s)^2}$$

ne subisse aucune modification avec le temps, *c'est-à-dire que la f. e. m. d'alimentation E du pont de Wheatstone doit être constante.*

NOTE IV

INFLUENCE DE LA PROPAGATION

Nous avons admis, dès le début de ce travail, que toutes précautions étaient prises pour assurer *l'uniformité* de la température à tout instant et il en est résulté que nous avons pu considérer la température du milieu réglé comme variant simultanément de la même manière en tous les points.

Pour des variations de température *très rapides*, l'hypothèse de l'uniformité n'est plus admissible, quelque moyen que nous prenions d'ailleurs pour assurer cette uniformité, et il y a lieu de tenir compte des phénomènes de propagation, ce qui complique singulièrement les résultats. Il n'est plus possible de partir de température *moyenne* de l'étuve, par rapport à laquelle la température au voisinage de la source de chaleur serait *en avance* si la variation avait lieu dans un sens unique, mais pourrait être en avance ou en retard dans le cas de variations périodiques. Il peut même exister un décalage en avant ou en arrière entre la température de la résistance thermométrique et la température moyenne, produisant l'effet d'un retard ϵ positif ou négatif et donnant lieu aux phénomènes oscillatoires dont nous avons parlé au § 9, chapitre I.

BIBLIOGRAPHIE

1. D'ARSONVAL. — *C. R.*, XCII, 1880, p. 76. Thermostats pour hautes températures : un thermomètre à air, à pression variable, agit sur une membrane métallique qui ferme plus ou moins une arrivée de gaz.
2. P. REGNARD. — *L'Electricien*, 1882, p. 416, propose un appareil où la fermeture du circuit d'un électro par un thermomètre à contacts produit le déplacement de la source de chaleur par l'armature de cet électro. Inerties mécanique et calorifique considérables.
3. RADOLPH: — *Journ. of. Franklin Inst.*, 2222, 1883, p. 465. Appareil discontinu utilisant un thermomètre à alcool. La dilatation de ce liquide agit sur une colonne de mercure qui ferme une arrivée de gaz. Grande inertie calorifique du thermomètre.
4. MEYER. — *Chem. Ber.*, XVI, p. 1087, et XVII, p. 478, utilise la différence entre la dilatation d'un tube de laiton et celle d'une tige de verre : un levier fixé à ce thermomètre agit sur une chicanne. L'appareil est continu, mais possède une grande inertie calorifique et une faible surface de contact avec le milieu à régler.
5. E.-H. von BAUMBACH. — *C. R.*, IC, p. 370 et *Zeitsch. f. Instr.*, V, 1885, p. 172. Principe analogue à celui du thermostat de Raudolph (3).
6. FOCK. — *Chem. Ber.*, XVIII, p. 1124, utilise une source chaude et une source froide. La circulation du liquide dont on veut régler la température s'effectue dans un sens qui tend à maintenir la température constante.
7. KALECZINSKY. — *Zeitschr. f. anal. Chem.*, XXV, p. 190. Modifications au thermostat de Meyer (4) destinées à éviter les fuites de gaz et la présence de vapeur de mercure.
8. DARWIN. — *Nature*, XXXIII, p. 596.
9. KOCHERTHALER. — *Zeitsch. f. Instr.*, VII, 1887, p. 39. La pression d'une vapeur pousse du mercure qui soulève un flotteur. Une théorie

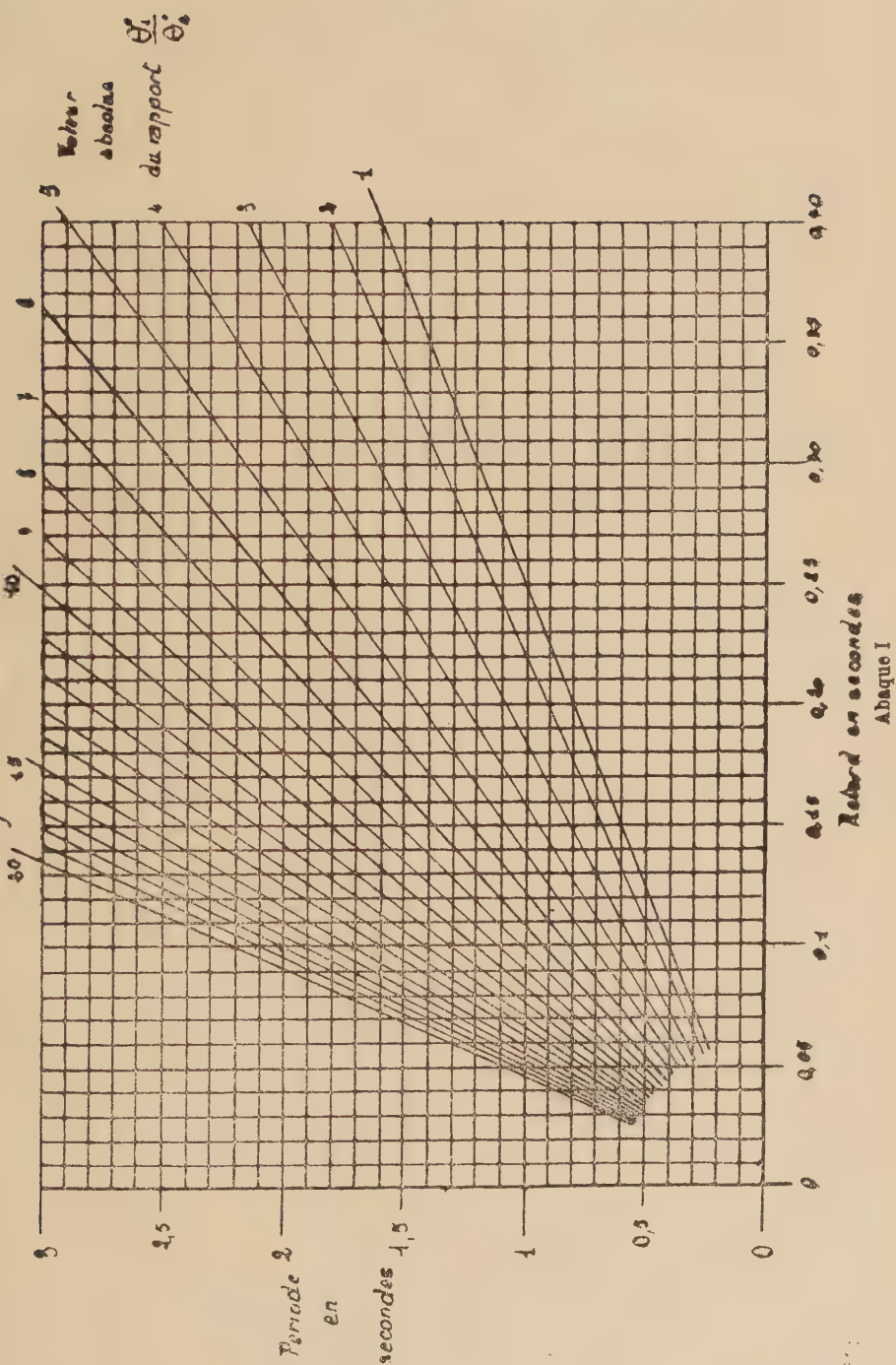
assez simple montrerait que l'appareil possède deux périodes d'oscillations, dont une d'origine mécanique.

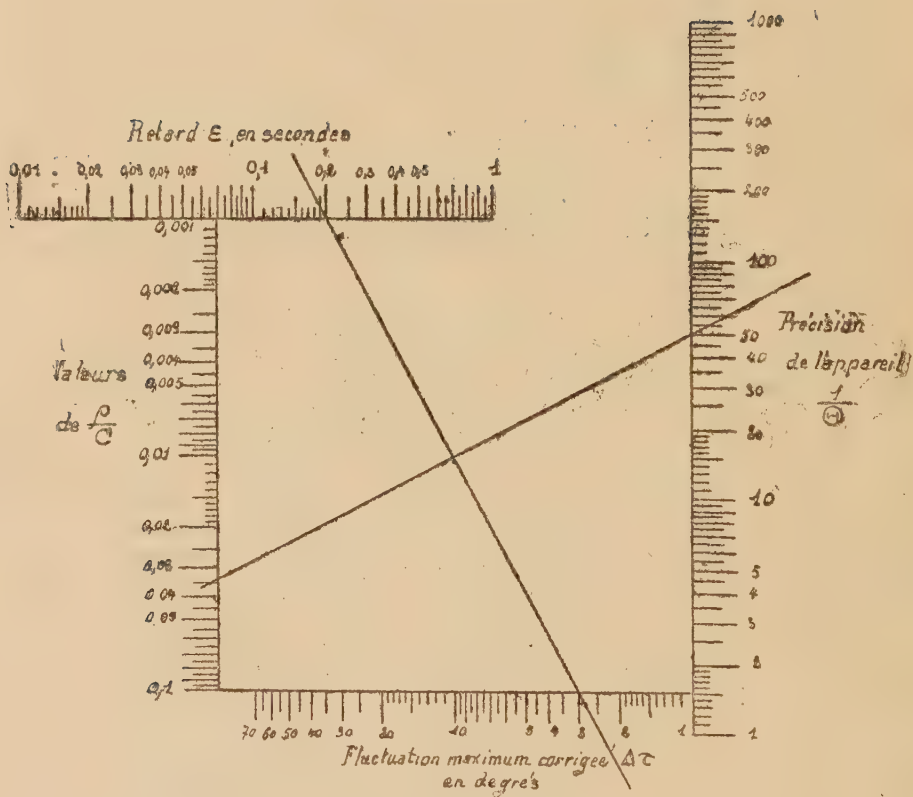
10. RUGHEIMER. — *Chem. Ber.*, XX, p. 1280. Même principe que les thermostats de MEYER et KALECZINSKY (4 et 7).
11. LOVITON. — *Rev. Int. de l'Elect.*, VI, p. 289, utilise un thermomètre à vapeur d'éther avec contact mercure-platine. Type classique d'appareil discontinu.
12. BLAUFUSS WEISS. — *Zeitsch. f. Instr.*, VIII, 1888, p. 406, utilisent un thermomètre à tige dilatable.
13. ROHRBECK. — *Zeitsch. f. Instr.*, VIII, 1888, p. 440, utilise comme thermomètre une spirale de Bréguet.
14. BOHN. — *Zeitsch. f. Instr.*, IX, 1889, p. 79. Appareil continu où une venue est réglée par une spirale de Bréguet.
15. PEUSKY. — *Zeitsch. f. Instr.*, X, 1890 p. 28. Modification au thermostat de d'Arsonval (1).
16. ROHRBECK. — *Zeitschr. f. Instr.*, X, 1890, p. 228. Thermomètre à contacts à tension de vapeur, même principe que Loviton (11).
17. MAHLKE. — *Zeitschr. f. Instr.*, XIII, 1893, p. 197. Thermostat à bain d'huile avec circulation entretenue par des ailettes.
18. RUSSERL. — *Zeitsch. f. Instr.*, XIV, 1894, p. 36, P.. Disposition analogue à celle de Requard. Les variations sont atténuées par un bain d'huile formant volant.
19. KOCH. — *Zeitsch. f. Wiss. Mikr.*, 1893, p. 161. Appareil continu ; la dilatation du liquide contenu dans une capsule actionne un écran par l'intermédiaire d'un système de levier.
20. BEHRENS. — *Zeitsch. f. Wiss. Mikr.*, 1895, p. 1. Thermostat pour table chauffante de microscope ; le piston d'un cylindre plein d'air formant thermomètre, règle continuellement un courant d'eau chaude.
21. KARAWAIEW. — *Zeit. f. Wiss. Mikr.*, 1896, p. 289. Appareil continu où un thermomètre à air muni d'une poche en caoutchouc déplace un écran entre la source et l'étuve.
22. GOUY. — *Journ. Phys.*, 1987, p. 479, décrit un thermostat avec thermomètre à alcool et contact mercure-platine. Mémoire renfermant l'indication d'une période pour l'appareil employé.
23. PULFRICH. — *Notice pour le réfractomètre construit par Zeiss*, règle la température par l'intermédiaire d'un régulateur manométrique continu.
26. CADY. — *Journ. of. Phys. Chem.*, 1898, p. 147, utilise une source chaude et une source froide, entre lesquelles une circulation variable de liquide est créée par un petit moteur, lui-même commandé par le contact d'un thermomètre.
27. GRUMLICH. — *Zeitsch. f. Instr.*, XVIII, 1p98, p. 317, utilise un appareil discontinu où le circuit d'un électro est fermé par une spi-

- rale de Bréguet. Etudie l'influence de la pression du gaz sur la régulation obtenue ; malheureusement sans voir l'existence d'une période et en notant les températures à des instants tout à fait quelconques.
28. DUONÉ et LORY. — *Amer. Journ. of. Sc.*, 1900, p. 179, emploient un chauffage électrique (courant alternatif passant dans une solution de NaCl entre électrodes de Zn). La régulation, discontinue, est effectuée par un thermomètre à contacts (alcool-mercure).
29. KNIPP. — *Phys. Rev.*, 1901, p. 47, utilise la différence entre les dilations du fer et du cuivre ; l'appareil est chauffé électriquement, la régulation est discontinue.
30. D'ARSONVAL. — *C. R.*, CXXXIII, 1901, p. 980.
31. DARWIN. — *Philos. Mag.*, 1904, p. 408. Utilise un pont de Wheatstone dont le galvanomètre est remplacé par un relais, à la fermeture et à l'ouverture de l'interrupteur qui commande le chauffage.
32. ALLEN. — *Nature*, 1903, p. 69. Un tube manométrique plein de créosote agit sur la régulation par l'intermédiaire d'un levier.
33. KOLOWRAT. — *Journ. Phys.* 1909, p. 495. Appareil compliqué comprenant plusieurs circuits successifs : un premier circuit thermométrique comprend un galvanomètre ; un rayon lumineux peut être envoyé, par le miroir de ce galvanomètre, sur une pile thermo-électrique qui commande un relais, lequel ferme à son tour le circuit principal. Appareil discontinu présentant plusieurs retards successifs.
34. GAHN. — *Zeitsch. f. Electrochem.*, 1911 et *Z. f. Instr.*, XXVIII, 198. Thermostat réglé par un thermomètre à chloroforme, p. 80.
35. MUENCKE. — *Chem. Zeit.*, 1912, p. 659. Appareil discontinu ne différant des précédents que par le thermomètre (une membrane pousse du mercure sur deux petits contacts).
36. CUMING. — *Chemical News*, CIV, 1912, p. 307. Appareil discontinu où le thermomètre est à variation de densité (le déplacement d'un flotteur établit un contact).
37. EARL OF BERKELEY et BURTON. — *Philos. Mag.*, 1911, p. 211. Thermomètre à contacts formé d'une barre double invar et laiton. Réalisent la constance de température à 0,02° près pendant 3 heures.
38. HAMY. — *C. R.*, 156, 1912, p. 1128, décrit un thermostat continu pour spectrographie.
39. BAYER. — *Industrie und Gewerbeblatt*, 98, 1913, p. 61, décrit un thermostat réglable, la tige du thermomètre à contacts portant une rangée de petits fils de platine.
40. FAUDER. — *Zeitsch. f. ang. chem.*, XXVI, 1913, p. 136. Appareil discontinu à contacts, réglage.
41. BJORNSEN. — *Zeitsch. f. Instr.*, XXXV, 1915, p. 74, signale l'in-

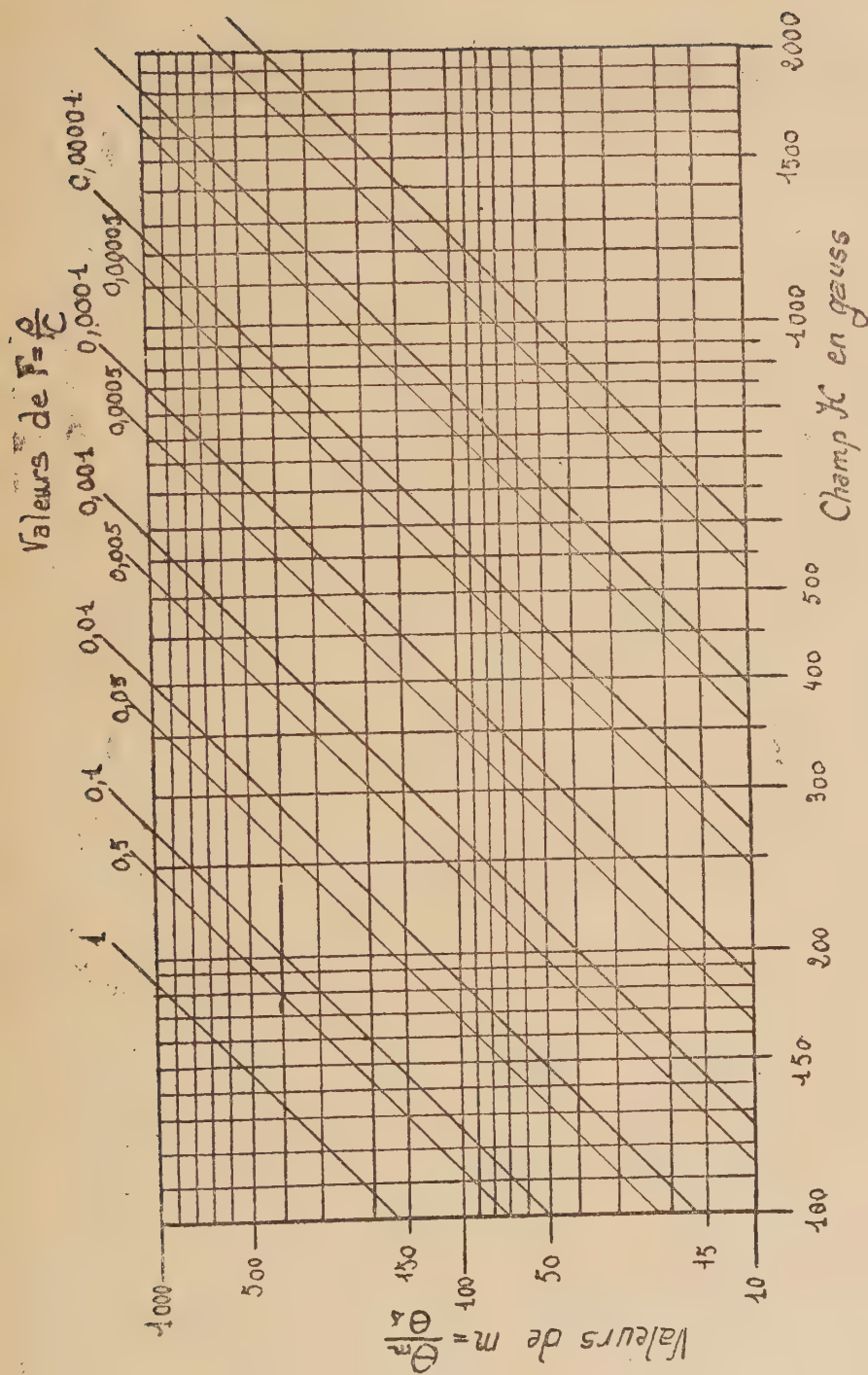
- convénient des thermomètres de réglage ayant une grande masse en eau.
42. VERNEY. — *C. R.*, 183, 1926, p. 561. Thermostat et variateur discontinu. Le thermomètre est un couple thermo-électrique agissant sur l'un des cadres d'un équipage mobile à plusieurs cadres disposés de manière à augmenter la pression sur les contacts dès qu'un léger contact se produit.
43. ESCLAUGON. — *Mémoires de la Société des Sciences Physiques de Bordeaux*, T. V. Janvier 1911. L'auteur expose une théorie très générale applicable à un grand nombre de régulateurs. (Toutefois la grandeur réglée n'est pas une constante en général, mais une fonction de paramètres extérieurs). Décrit des thermostats continus réglés par des thermomètres à gaz provoquant la descente d'une colonne de mercure et le déséquilibre d'une balance.
44. ESCLANGON. — *C. R.*, 154, 1912, pp. 178 et 495, régulateurs continus n'agissant pas par la variable thermométrique.
45. ESCLANGON. — *C. R.*, 156, 1913, p. 1666. Appareil continu à équilibre indifférent sous le régime normal ; n'utilise plus la variable thermométrique, d'où suppression des inconvénients signalés au chapitre II.
46. TIAN. — *C. R.*, 174, 1922, p. 1453, signale les propriétés amortissantes des enceintes multiples (dans les expériences de M. Tian, un seul thermostat règle la première enceinte).
-

Determination expérimentale du retard ϵ .





Abaque II



Abeque III

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES DÉRIVÉS DE LA CELLULOSE
ET LEURS APPLICATIONS INDUSTRIELLES

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 7 Avril 1927

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Ch. MAURAIN.

[VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris

S. CHARLÉTY.

Imp. des PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, 49, Bd. St-Michel, Paris (5°).
Mai 1927.
